

"DER KRITISCHE GALTON-WATSON PROZESS MIT IMMIGRATION —
LOKALE GRENZWERTSATZE UND APPROXIMIERENDE DIFFUSIONEN"

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Mathematik

der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Bernhard Mellein

geb. in Germersheim

Mainz 1979

"DER KRITISCHE GALTON-WATSON PROZESS MIT IMMIGRATION —
LOKALE GRENZWERTSATZE UND APPROXIMIERENDE DIFFUSIONEN"

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Mathematik

der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Bernhard Mellein

geb. in Germersheim

Mainz 1979



Dekan: Prof. Dr. W. Bühler

1. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Bühler (Mainz)
2. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Bartoszyński (Warschau)
3. Berichterstatter: Prof. Dr. S. Assmussen (Kopenhagen)

Tag der mündlichen Prüfung: 3.7.1979

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	1
Teil I	
Der kritische Galton-Watson Prozeß mit Immigration – Lokale Grenzwertsätze	
§ 1 Bezeichnungen und Grundlagen	5
§ 2 Das asymptotische Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeit bei konstanter Ausgangspopulation	11
§ 3 Das asymptotische Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeit bei variabler Ausgangspopulation	26
3.1 Der lokale Grenzwertsatz für den kritischen GW-Prozeß	26
3.2 Der lokale Grenzwertsatz für den kritischen GWI-Prozeß	31
§ 4 Das asymptotische Verhalten von stationärem Maß und Green'scher Funktion	38
4.1 Das stationäre Maß	40
4.2 Die Green'sche Funktion	41
Teil II	
Der kritische Galton-Watson Prozeß mit Immigration – Approximierende Diffusionen und Generationsstruktur	
§ 5 Bezeichnungen und Grundlagen	48
5.1 Bedingte kritische GW-Prozesse	48
5.2 Die Generationen im GWI-Prozeß	51
§ 6 Approximierende Diffusionen	52
6.1 Der kritische GW-Prozeß	53
6.2 Der kritische GWI-Prozeß	66
§ 7 Die Verteilung der Generationen im kritischen GWI-Prozeß	70
7.1 Die Generationsstruktur	70
7.2 Die Nachkommen der Urväter	74
Bezeichnungen und Abkürzungen	79
Abstract	80
Literaturverzeichnis	81



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Der Galton-Watson Prozeß mit (konstanter) Immigration kann als ein mathematisch-stochastisches Modell für eine Population angesehen werden, die sich anschaulich nach folgenden Gesetzen entwickelt:

- (i) Zum Zeitpunkt 0 sind X_0 Objekte, sog. Urväter oder Anfangsindividuen, vorhanden.
- (ii) Jedes der zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ vorhandenen X_n Objekte stirbt nach einer Zeiteinheit und hinterläßt unabhängig von allen anderen nach einer bestimmten Reproduktionsverteilung, die für alle Individuen dieselbe und unabhängig von n ist, eine zufällige Anzahl von Nachkommen; diese bilden zusammen mit einer zum Zeitpunkt $n+1$ immigrierenden zufälligen Anzahl von Einwanderern die $n+1$ -te Generation vom Umfang X_{n+1} . Die Einwanderung erfolgt dabei nach einer Immigrationsverteilung, die unabhängig von X_n und n ist.

Bezeichnet man die für die Bevölkerungsgröße X_n offensichtlich maßgeblich verantwortlichen Verteilungen, nämlich Reproduktions- bzw. Immigrationsverteilung mit

$$\{p_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{bzw.} \quad \{q_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\},$$

so läßt sich die obige Modellbeschreibung folgendermaßen präzisieren:

Ein GWI-Prozeß $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine zeitlich homogene Markov'sche Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$. Ihre Übergangsfunktion (oder Ein-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit) ist definiert durch

$$(0.1) \quad P(i, j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \sum_{k=0}^j p_k^{*i} q_{j-k}, \quad i, j, n \in \mathbb{N}_0;$$

dabei ist $\{p_k^{*i} \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ die i -fache Faltung von $\{p_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$, also

$$p_k^{*0} = \delta_{0k}, \quad p_k^{*1} = p_k \quad \text{und} \quad p_k^{*i} = \sum_{s=0}^k p_s^{*(i-1)} p_{k-s}, \quad i, k \in \mathbb{N}_0.$$

Nach Festlegung einer Startverteilung ist der Prozeß durch (0.1) bereits vollständig bestimmt.

Die systematische Untersuchung des GWI-Prozesses begann 1965 mit Arbei-

ten von Heathcote (1965, 1966) und wurde insbesondere von Pakes (1970, 1971a, 1971b, 1972, 1976) und Seneta (1968, 1969, 1970a, 1970b) weitergeführt. Daneben wurden Galton-Watson Prozesse mit zeit- und zustandsabhängiger Immigration von Foster (1969, 1971) und von Foster & Williamson (1971), Mehrtyp - GWI - Prozesse von Quine (1970), Markov'sche und altersabhängige Verzweigungsprozesse mit Immigration von verschiedenen Autoren studiert. Wir werden auf diese Verallgemeinerungen und Erweiterungen des GWI - Konzepts nicht eingehen, sondern verweisen hier lediglich auf die Darstellungen und Literaturverzeichnisse in den Büchern von Athreya & Ney (1972) und Jagers (1975).

Ähnlich wie in der GW - Prozeß-Theorie unterscheidet man auch im Immigrations-Fall zwischen kritischen, sub- und superkritischen GWI - Prozessen, je nachdem ob der Erwartungswert der Reproduktionsverteilung gleich, kleiner oder größer 1 ist. In dieser Arbeit beschränken wir uns durchweg auf das Studium des kritischen GWI - Prozesses.

In der Theorie der zeitlich homogenen Markovketten spielen die Begriffe stationäres Maß und Green'sche Funktion eine wichtige Rolle. Ist P die in (0.1) definierte Übergangsfunktion des GWI - Prozesses $(X_n)_n$, so nennt man

$$\{\theta_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

ein stationäres Maß von P (oder von $(X_n)_n$), falls

$$(0.2) \quad 0 \leq \theta_j = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k P(k, j), \quad j \in N_0.$$

Die Green'sche Funktion $G (= G(\dots))$ von $(X_n)_n$ wird mit Hilfe der n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P_n(i, j) = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i), \quad m, n \in N_0,$$

die sich über die Chapman-Kolmogorov Gleichungen aus (0.1) bestimmen, definiert durch

$$(0.3) \quad G(i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(i, j), \quad i, j \in N_0.$$

($G(i, j)$ gibt an, wie oft (das kann unendlich oft sein!) der Prozeß $(X_n)_n$ im Mittel den Wert j annimmt, wenn er zur Zeit 0 im Zustand i gestartet wird.)

Pakes (1972) hat sich im Fall des kritischen GWI - Prozesses für diese

Größen interessiert. Er bestimmt das Grenzwverhalten ($r \rightarrow \infty$) u.a. von

$$\sum_{k=0}^r \theta_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^r G(i,k) .$$

Im Fall des kritischen GW-Prozesses (stationäres Maß und Green'sche Funktion werden durch ein 0 gekennzeichnet) präsentieren Kesten, Ney & Spitzer (1966) stärkere Ergebnisse. Sie beschreiben das asymptotische Verhalten ($r \rightarrow \infty$) u.a. von

$$\theta_r^0 \quad \text{und} \quad G^0(i,r) .$$

Das Instrumentarium, das diesen Autoren zu den weiterreichenden Aussagen verhilft, ist ein lokaler Grenzwertsatz für den kritischen GW-Prozeß, der ebenfalls von Kesten, Ney & Spitzer (1966) bereitgestellt wird.

Hauptergebnis von Teil I der vorliegenden Arbeit ist nun ein lokaler Grenzwertsatz für den kritischen GWI-Prozeß (Satz 2.1), der in § 2 formuliert wird. Unter Bedingungen an die Reproduktions- und Immigrationsverteilung des Prozesses, die möglicherweise leicht redundant sind (siehe dazu auch Athreya & Ney (1972, Seite 73)), gibt er an, wie sich $P_n(i,j)$ verhält, wenn, bei festem $i \in \mathbb{N}_0$, j und n so gegen ∞ divergieren, daß $\frac{j}{n}$ beschränkt bleibt.

Die Frage nach dem asymptotischen Verhalten von θ_r läßt sich damit bereits klären (Abschnitt 4.1), etwa die nach dem Grenzwverhalten von

$$G(i,j) \quad \text{für} \quad \frac{j}{n} \rightarrow \mu \geq 0, \quad i, j \rightarrow \infty$$

bleibt jedoch zunächst offen. Als zu ihrer Beantwortung geeignet erweist sich der (lokale Grenzwert-) Satz 3.2. Er beschreibt $P_n(i,j)$ im Fall "großer j, n und i ", während Satz 3.1 dies für die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit im GW-Prozeß-Fall leistet.

Auch in Teil II dieser Arbeit werden die lokalen Grenzwertsätze der §§ 2 und 3 bei unterschiedlichen Fragestellungen erfolgreich als beweistechnisches Hilfsmittel eingesetzt.

Lamperti (1967), Lamperti & Ney (1968) und Esty (1976) haben den kritischen GW-Prozeß $(Z_n)_n$ in den verschiedensten bedingten Situationen studiert. Mit Hilfe des (lokalen Grenzwert-) Satzes 3.1 beweisen wir in § 6, daß

$$\left\{ \frac{1}{n} Z_{[nt]}; \quad 0 \leq t \leq 1 \mid Z_0 = [xn + o(n)], \quad Z_n = [yn + o(n)] \right\}, \quad x, y \geq 0$$

im Sinne der endlich-dimensionalen Verteilungen gegen einen Diffusions-

prozeß konvergiert ($n \rightarrow \infty$). Satz 6.2 zeigt einen interessanten Zusammenhang mit dem Ergebnis von Lamperti & Ney (1968) auf, die das asymptotische Verhalten ($n \rightarrow \infty$) von

$$\left\{ \frac{1}{n} Z_{[nt]} \right\}; 0 \leq t \leq 1 \mid Z_0 = [xn+o(n)], Z_n > 0 \quad , \quad x \geq 0$$

untersucht haben.

Einen den kritischen GWI - Prozeß in einer entsprechenden bedingten Situation approximierenden Diffusionsprozeß geben wir ebenfalls in § 6 an.

In § 7 beantworten wir die Frage nach der Verteilung der Generationen im kritischen GWI - Prozeß.

Einen weiteren Einblick in die Struktur des kritischen GWI - Prozesses $(X_n)_n$ gewinnen wir schließlich durch die Untersuchung des (schwachen) Konvergenzverhaltens von

$$\frac{1}{n} Z_{[nt]} \mid X_0 = [xn+o(n)], X_n = [yn+o(n)] ; x, y \geq 0, t > 0$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei Z_m die Anzahl der zur Zeit m vorhandenen Objekte der Generation m angibt.

Resultate, die in den §§ 2,3 oder 4 bzw. in den §§ 6 oder 7 benötigt werden oder in engem Zusammenhang mit dort hergeleiteten Ergebnissen stehen, sind in § 1 bzw. in § 5 zusammengetragen und in der Monographie von Athreya & Ney (1972) wiederzufinden, wenn keine anderen Quellen angegeben sind.

Verabredungen über bestimmte Bezeichnungen sind meist ebenfalls in § 1 oder in § 5 getroffen. Ein Verzeichnis der verwendeten Symbolik ist auf Seite 79 zu finden.

Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Bühler danke ich für seine Unterstützung, für wertvolle Hinweise und Diskussionen während der Anfertigung dieser Arbeit.

Teil I

Der kritische Galton-Watson Prozeß mit Immigration – Lokale Grenzwertsätze

§ 1 Bezeichnungen und Grundlagen

In Teil I dieser Arbeit reservieren wir das Symbol

$$(x_n^{(i)})_{n \in N_0}, \quad i \in N_0.$$

für einen kritischen GWI - Prozeß mit $x_0^{(i)} \equiv i$

und bezeichnen mit

f die WEF seiner Nachkommensverteilung $\{p_k \mid k = 0, 1, \dots\}$

h die WEF seiner Immigrationsverteilung $\{q_k \mid k = 0, 1, \dots\}$

$P_n (= P_n(\dots))$ seine n-Schritt-Übergangsfunktion,

die für $n=1$ durch (0.1) definiert ist und sich für $n \geq 2$ hieraus über die Chapman-Kolmogorov Gleichungen ergibt und mit

$g_n^{(i)}$ die erzeugende Funktion von $x_n^{(i)}$, $n, i \in N_0$.

Man überzeugt sich leicht, daß

$$(1.1) \quad g_n^{(i)}(s) := E \left[s^{x_n^{(i)}} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(i, k) s^k$$

$$= (f_n(s))^i \prod_{r=0}^{n-1} h(f_r(s)), \quad |s| \leq 1,$$

wobei wie üblich

f_r die r -te Iterierte von f , $r \in \mathbb{N}_0$,

bedeutet $(f_0(s) = s, f_1(s) = f(s), f_{r+1}(s) = f(f_r(s)))$.

Wir nehmen durchweg an, daß

$$(1.2) \quad p_1 < 1$$

$$(1.3) \quad f'(1-) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = 1$$

$$(1.4) \quad f''(1-) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k < \infty$$

$$(1.5) \quad 0 < q_0 < 1$$

und

$$(1.5a) \quad h'(1-) = \sum_{k=1}^{\infty} k q_k < \infty$$

ist und setzen

$$\alpha = \frac{1}{2} f''(1-)$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} h'(1-).$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß

$$(1.6) \quad \sum_{k=2}^{\infty} p_k k^2 \log k < \infty$$

$$(1.7) \quad \sum_{k=2}^{\infty} q_k k \log k < \infty$$

ist, hat Pakes (1972) nachgewiesen, daß

$$(1.8) \quad n^\gamma g_n^{(i)} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0 \text{ auf jedem Kompaktum des offenen Einheitskreises gleichmäßig konvergiert}$$

und die von i unabhängige Grenzfunktion, die wir

$$(1.8a) \quad \mathfrak{J}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma g_n^{(i)}(s), \quad |s| < 1, i \in \mathbb{N}_0,$$

nennen, die folgende Funktionalgleichung erfüllt

$$(1.9) \quad \mathcal{J}(s) = h(s) \mathcal{J}(f(s)) , \quad |s| < 1 .$$

Für die Koeffizienten θ_k der Potenzreihenentwicklung von $\mathcal{J}$,

$$(1.9a) \quad \mathcal{J}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k s^k , \quad |s| < 1 ,$$

gilt

$$(1.10) \quad \theta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma P_n(i, j) , \quad i, j \in N_0 ,$$

(dies folgt aus (1.8)) und (o.2), d.h.

• $\{\theta_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ ist das (auf diese Weise eindeutig festgelegte) stationäre Maß von $(x_n^{(i)})_n$.

(Seneta (1969); er zeigt, daß die erzeugende Funktion eines stationären Maßes eines GWI-Prozesses Lösung der Funktionalgleichung (1.9) und die Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Multiplikation mit Konstanten) eines stationären Maßes bereits durch (1.2), (1.3) und (1.5) gesichert ist)

Wie in (o.3) bezeichnen wir mit

$G (= G(.,.))$ die Green'sche Funktion von $(x_n^{(i)})_n$,

die unter den Voraussetzungen (1.6), (1.7) und $\gamma > 1$ existiert (Pakes (1972)).

Zur Vereinfachung der Schreibweise verabreden wir noch

$$\begin{aligned} x_n^{(0)} &\equiv x_n \\ g_n^{(0)} &\equiv g_n \end{aligned} , \quad n \in N_0 .$$

und

Die dem GWI - Prozeß $(X_n^{(i)})_n$ zugrundeliegenden Unabhängigkeitsannahmen (Interaktion von Individuen der Population ist ausgeschlossen) erlauben

$$X_n^{(i)} = X_n + Z_n^{(i)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

als Summe unabhängiger $X_n, Z_n^{(i)}$ zu schreiben, wobei

$$(Z_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

ein kritischer GW - Prozeß mit $Z_0^{(i)} \equiv i$,

mit Nachkommensverteilung $\{p_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$

ist, für die (1.2), (1.3) und (1.4) erfüllt ist.

Wir bezeichnen mit

$Q_n (= Q_n(\dots))$ seine n-Schritt-Übergangsfunktion,

für die dann offensichtlich gilt

$$\left(f_n(s)\right)^i = \sum_{j=0}^{\infty} Q_n(i, j) s^j, \quad i, n \in \mathbb{N}_0, \quad |s| \leq 1,$$

mit $G^0 (= G^0(\dots))$ seine Greenfunktion,

die auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ wegen (1.2) existiert, mit

$\{\theta_k^0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ sein stationäres Maß,

das wir durch die Normalisierung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k^0 p_0^k = 1$$

eindeutig festlegen und nennen ihn aperiodisch, wenn der

(1.11) größte gemeinsame Teiler von $\{k \in \mathbb{N} \mid Q(1, k) > 0\}$ gleich Eins

ist.

Die Bedingungen (1.6), (1.7) und (1.11), die öfters gemeinsam gefordert werden müssen, werden wir als

(1.12) (1.6), (1.7) und (1.11) seien erfüllt

zitieren.

$$(\Delta)_{j,n,K} \quad \text{bzw.} \quad (\Delta)_{i,j,n,K}$$

in Verbindung mit "lim", " $\sim$ ", " $\circ$ " oder " $\circ$ " soll bedeuten, daß der Grenzübergang folgendermaßen durchgeführt wird:

$$"j \text{ und } n \text{ divergieren so gegen } +\infty, \text{ daß } \frac{j}{n} \text{ durch } K < \infty \text{ (nach oben) beschränkt bleibt} "$$

bzw.

$$"i, j \text{ und } n \text{ divergieren so gegen } +\infty, \text{ daß } \frac{i}{n} \text{ und } \frac{j}{n} \text{ durch } K < \infty \text{ beschränkt bleiben} "$$

Wenn es auf die genaue Kenntnis der oberen Schranke K nicht ankommt schreiben wir auch nur

$$(\Delta)_{j,n} \quad \text{bzw.} \quad (\Delta)_{i,j,n}$$

Der in der Einleitung angesprochene lokale Grenzwertsatz für den kritischen GW - Prozeß läßt sich damit so formulieren

Satz 1.1: (Kesten, Ney & Spitzer (1966)). Unter den Voraussetzungen (1.6) und (1.11) gilt

$$Q_n(i,j) \underset{(\Delta)_{j,n}}{\sim} \frac{i}{(an)^2} \exp\left\{-\frac{j}{an}\right\}, \quad \text{für alle festen } i \in \mathbb{N}.$$

Im Verlauf dieser Arbeit spielen die folgenden Abschätzungen eine wichtige Rolle.

Satz 1.2: (Kesten, Ney & Spitzer (1966)). Falls (1.6) erfüllt ist, gilt

$$(1.13) \quad \sup_{j \geq 1} Q_n(i,j) \leq \frac{M_1 \cdot i}{n^2}, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$(1.14) \quad \sup_{j \geq 1} Q_n(i,j) \leq \frac{M_2}{\sqrt{in}}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Schließlich wird es nützlich sein, sich an Resultate zu erinnern, die aufgrund unserer generellen Annahmen gelten, nämlich an

$$(1.15) \quad 1 - f_n(0) \sim (\alpha n)^{-1} \quad (n \rightarrow \infty),$$

an das exponentielle Gesetz

$$(1.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \exp \left\{ -\theta \frac{Z_n^{(1)}}{\alpha n} \right\} \mid Z_n^{(1)} > 0 \right\} = (1 + \theta)^{-1}$$

und an die von Foster (1969), Pakes (1971a) und Seneta (1970b) unabhängig voneinander bewiesene Beziehung

$$(1.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \exp \left\{ -\theta \frac{X_n^{(i)}}{\alpha n} \right\} \right\} = (1 + \theta)^{-Y}, \quad i \in N_0.$$

Die Beweise der §§ 2,3 und 4 betreffend vereinbaren wir noch:

$M_1, M_2, \dots, M, M', M'', \dots, A, C, \dots$ bezeichnen positive Konstanten. Abschätzungen wie etwa (1.13) sind immer so zu lesen: "Es gibt eine Konstante $0 < M_1 < \infty$ mit der Eigenschaft..." .

Insbesondere brauchen dann natürlich in verschiedenen Ungleichungen auftretende, gleichbenannte Konstanten nicht übereinzustimmen.

§ 2 Das asymptotische Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeit bei konstanter Ausgangspopulation

Grundlegend für die gesamte Arbeit ist der nachfolgend formulierte lokale Grenzwertsatz für den kritischen GWI-Prozeß.

Satz 2.1: Ist (1.12) erfüllt, so gilt für jedes feste $i \in N_0$

$$(2.1) \quad \lim_{(\Delta)_{j,n}} n \left(\frac{j}{n} \right)^{1-\gamma} \exp \left\{ \frac{j}{\alpha n} \right\} \alpha^\gamma r(\gamma) P_n(i, j) = 1.$$

Bemerkung 2.1: Folgende Situationen, in denen i immer festgehalten ist, verdienen besondere Beachtung:

a) Es gibt ein $C = C(c, \alpha, \gamma) > 0$ mit

$$\lim_{\frac{j}{n} \rightarrow c > 0} n P_n(i, j) = C.$$

b) Es sei $\gamma \neq 1$, $\xi \in (\min(\gamma, 1), \max(\gamma, 1))$ und $n := \frac{\xi - \gamma}{1 - \gamma}$ (es ist $0 < n < 1$); dann gibt es ein $C' = C'(c', \alpha, \gamma, \xi) > 0$ mit

$$\lim_{\frac{j}{n} \rightarrow c' > 0} n^\xi P_n(i, j) = C'.$$

Diese Aussage kommt wegen (1.10) und a) nicht überraschend.

c) Im Fall $\gamma = 1 = i$ reduziert sich (2.1) auf

$$\lim_{(\Delta)_{j,n}} \alpha n P_n(1, j) \exp \left\{ \frac{j}{\alpha n} \right\} = 1;$$

wegen Satz 1.1 und (1.15) bedeutet dies, daß sich

$$P_n(1, j) \quad \text{und} \quad \frac{Q_n(1, j)}{1 - f_n(0)}$$

beim $(\Delta)_{j,n}$ -Grenzübergang gleich verhalten. Da ((1.16), (1.17)) im Fall $\gamma = 1$ die Grenzverteilungen von

$$\frac{X_n}{\alpha n} \quad \text{und} \quad \frac{Z_n^{(1)}}{\alpha n} | Z_n^{(1)} > 0$$

übereinstimmen, kann man das erwarten.

Der Beweis von Satz 2.1 wird zunächst für den Fall $i = 0$ geführt und besteht im wesentlichen aus zwei Teilen:

Im ersten Teil (Lemmata 2.1 - 2.6) wird nachgewiesen, daß sich die erzeugende Funktion g_n der W-Verteilung $\{P_n(0,j) | j = 0,1,\dots\}$ in folgender Weise schreiben läßt

$$(2.2) \quad g_n(s) = \left(\frac{1 + \frac{(N-1)\alpha(1-s)}{n-1}}{1 + \frac{\alpha(1-s)}{n-1}} \right)^Y \Lambda(n,N,s), \quad n > N;$$

dabei ist N eine natürliche Zahl, die von f und h abhängt und

$$\Lambda(n,N,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{n,N,j} s^j \quad \text{eine Potenzreihe mit}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_{n,N,j}| < M < \infty \quad \text{für alle } n > N.$$

Aufschluß über das asymptotische Verhalten der $P_n(0,j)$ erhält man dann im zweiten Teil des Beweises durch Koeffizientenvergleich in (2.2).

Das ist im übrigen genau die Vorgehensweise von Kesten, Ney & Spitzer (1966) beim Beweis des lokalen Grenzwertsatzes im GW-Prozeß-Fall.

Ähnlich wie bei Kesten, Ney & Spitzer (1966) erweist es sich als nützlich, mit einer l_1 -Norm zu arbeiten, die in Lemma 2.1 eingeführt wird. Zunächst setzen wir noch fest:

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

und

$$\mathcal{D} := \{a \mid a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty\}.$$

Lemma 2.1: Durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: \|a\| \quad (\equiv: \|a(z)\| \quad \text{für } z \in D)$$

ist auf $\mathcal{D}$ eine Norm definiert. Sie hat außerdem die beiden Eigenschaften:

$$(a) \quad \sup_{z \in D} |a(z)| \leq \|a\| \quad \text{für alle } a \in \mathcal{D}$$

und

$$(b) \quad \|a b\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \text{für alle } a, b \in \mathcal{D}.$$

Beweis: Dies rechnet man einfach nach.

Ein erster Schritt auf dem Wege zur Produktdarstellung (2.2) wird getan im

Lemma 2.2: Gilt (1.7), so gibt es eine positive ganze Zahl N , so daß für alle $n \geq N$ g_n in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$g_n(s) = g_N(s) \prod_{k=N}^{n-1} \left\{ 1 - h'(1)(1 - f_k(s)) \right\} \prod_{k=N}^{n-1} (1 + a_k(s)) , \quad s \in D ;$$

Dabei sind $a_N(s), a_{N+1}(s), \dots$ Potenzreihen mit

$$\sum_{k=N}^{\infty} \|a_k(s)\| < \infty .$$

Beweis: (i) Festsetzung von N : Wir wählen $N_1 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$(2.3) \quad \|h'(1)(1 - f_k(s))\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } k \geq N_1 .$$

Das ist möglich, denn

$$\|h'(1)(1 - f_k(s))\| = 2h'(1)(1 - f_k(0))$$

und letzteres ist für $k \rightarrow \infty$ bekanntlich eine Nullfolge.

Weiter bestimmen wir $N_2 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\frac{2h'(1)}{1 + N_2 \alpha} \leq \frac{1}{2}$$

und setzen

$$N := \max(N_1, N_2, 4) .$$

(ii) Taylorentwicklung von h : Durch Koeffizientenvergleich überzeugt man sich leicht, daß

$$(2.4) \quad h(s) - 1 = \sum_{r=1}^{\infty} r q_r (s-1) + \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} (s^m-1)(s-1) , \quad s \in D .$$

Setzt man

$$\epsilon(s) = \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} (s^m-1)$$

und

$$\delta(s) = \epsilon(s)(s-1) ,$$

so schreibt sich (2.4)

$$(2.5) \quad h(s) = 1 + h'(1)(s-1) + \delta(s) , \quad s \in D .$$

(iii) Definition der $a_N(s), a_{N+1}(s), \dots$: Mit Hilfe der Beziehung (2.5) erhält man für alle $n > N$:

$$g_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} h(f_k(s)) = g_N(s) \prod_{k=N}^{n-1} h(f_k(s))$$

$$\begin{aligned}
 &= g_N(s) \prod_{k=N}^{n-1} \left(1 - h'(1)(1 - f_k(s)) + \delta(f_k(s)) \right) \\
 &= g_N(s) \prod_{k=N}^{n-1} \left(1 - h'(1)(1 - f_k(s)) \right) \prod_{k=N}^{n-1} (1 + a_k(s)) \quad ,
 \end{aligned}$$

wobei

$$a_k(s) := \frac{\delta(f_k(s))}{1 - h'(1)(1 - f_k(s))} \quad , \quad k = N, N+1, \dots$$

gesetzt wurde. Diese Festsetzung ist wegen (2.3) aufgrund von Lemma 2.1 (a) für alle $s \in D$ möglich.

(iv) Abschätzung der a_k : Für alle $k \geq N$ gilt

$$a_k(s) = \delta(f_k(s)) \sum_{j=0}^{\infty} \left(h'(1)(1 - f_k(s)) \right)^j ,$$

so daß unter Beachtung von Lemma 2.1 und (2.3) folgt

$$(2.6) \quad \|a_k(s)\| \leq \|\delta(f_k(s))\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2\|\delta(f_k(s))\| \quad , \quad k = N, N+1, \dots$$

Zur weiteren Untersuchung von $\|\delta(f_k(s))\|$ stellen wir zwei Abschätzungen von $\|f_k^m(s) - 1\|$, $m \in \mathbb{N}$ bereit. Zum einen die triviale

$$(2.7) \quad \|f_k^m(s) - 1\| \leq 2 \quad , \quad k, m \in \mathbb{N}$$

und zum anderen

$$(2.8) \quad \|f_k^m(s) - 1\| \leq \frac{m}{k} M \quad , \quad k, m \in \mathbb{N} \quad ;$$

die letzte Abschätzung folgt sofort aus (1.15) und

$$\|f_k^m(s) - 1\| = \|(f_k(s) - 1) \sum_{j=0}^{m-1} f_k^j(s)\| \leq m \|f_k(s) - 1\| = 2m |1 - f_k(0)| .$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=N}^{\infty} \|\delta(f_k(s))\|$ (und wegen (2.6) die von $\sum_{k=N}^{\infty} \|a_k(s)\|$)

läßt sich damit aber nun leicht nachweisen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=N}^{\infty} \|\delta(f_k(s))\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(s) - 1\| \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} \|f_k^m(s) - 1\| \\
 &= \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(s) - 1\| \|f_k^m(s) - 1\|
 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} \left(2 \sum_{k=1}^m \|f_k(s) - 1\| + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{m M^2}{k^2} \right) \quad ((2.7) \text{ und } (2.8)).$$

Schließlich ist

$$\sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{m M^2}{k^2} \leq \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} M' \leq M' \sum_{r=2}^{\infty} r q_r < \infty ,$$

da der Erwartungswert der Immigrationsverteilung existiert, und

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} 2 \sum_{k=1}^m \|f_k(s) - 1\| &\leq \sum_{r=2}^{\infty} q_r \sum_{m=1}^{r-1} 2 \sum_{k=1}^m \frac{M}{k} \\ &\leq \sum_{r=2}^{\infty} q_r M'' \sum_{m=1}^{r-1} \log m \\ &\leq M''' \sum_{r=2}^{\infty} r q_r \log r < \infty , \end{aligned}$$

aufgrund der Voraussetzung (1.7).

q.e.d.

Lemma 2.3: Die Bedingungen (1.6) und (1.11) seien erfüllt. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| 1 - f_k(s) - \frac{1}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right\| < \infty .$$

Beweis: Lemma 2.3 stimmt bis auf eine kleine Modifikation mit Lemma 8 von Kesten, Ney & Spitzer (1966) überein. In deren Beweis hat man insbesondere (3.26) und (3.20) zu beachten.

q.e.d.

Bemerkung 2.2: Es ist gerade der Beweis von Lemma 8 bei Kesten, Ney & Spitzer (1966) in welchen die Voraussetzung (1.6) eingeht.

Ein weiterer Schritt in Richtung (2.2) wird formuliert in

Lemma 2.4: Es sei N die in Lemma 2.2 definierte natürliche Zahl. Unter der Voraussetzung (1.12) gilt für alle $n > N$ und alle $s \in D$

$$g_n(s) = g_N(s) \prod_{k=N}^{n-1} \left(1 - \frac{h'(1)}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right) \prod_{k=N}^{n-1} (1 + b_k(s)) ;$$

dabei sind $b_N(s), b_{N+1}(s), \dots$ Potenzreihen mit

$$\sum_{k=N}^{\infty} \|b_k(s)\| < \infty .$$

Beweis: Für $k \geq N$ definieren wir $b_k(s)$ als Fehlerterm durch

$$\left(1 - h'(1)(1 - f_k(s)) \right) (1 + a_k(s)) = \left(1 - \frac{h'(1)}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right) (1 + b_k(s)) ;$$

dabei sind die $a_k(s)$ die Potenzreihen aus Lemma 2.2. Nun ist

$$(2.9) \quad \left\| \frac{1}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right\| = \left\| \frac{1}{1+k\alpha} - \frac{1}{(1+k\alpha)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{k\alpha}{1+k\alpha} \right)^{j-1} s^j \right\| = \frac{2}{1+k\alpha},$$

so daß aufgrund der Wahl von N für alle $k \geq N$ gilt

$$\left\| \left(1 - \frac{h'(1)}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right)^{-1} \right\| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \left\| \frac{h'(1)}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right\|^l \leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} = 2.$$

Mit Hilfe von (2.3) läßt sich damit für alle $k \geq N$

$$b_k(s) = \left(1 - \frac{h'(1)}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right)^{-1} \left\{ \left(1 - h'(1)(1-f_k(s)) \right) a_k(s) + \frac{h'(1)}{k\alpha + (1-s)^{-1}} - h'(1)(1-f_k(s)) \right\}$$

nach oben abschätzen durch

$$\|b_k(s)\| \leq 2 \left\{ 2 \|a_k(s)\| + h'(1) \left\| \frac{1}{k\alpha + (1-s)^{-1}} - (1-f_k(s)) \right\| \right\}.$$

Die Behauptung folgt somit aus den Lemmata 2.2 und 2.3. q.e.d.

Die Vorbereitungen zum Beweis von (2.2) werden abgeschlossen durch

Lemma 2.5: Es gilt für alle $n > N$ (+ die natürliche Zahl aus Lemma 2.2) und alle $s \in D$

$$(2.10) \quad \prod_{k=N}^{n-1} \left(1 - \frac{h'(1)}{k\alpha + (1-s)^{-1}} \right) = \left(\frac{1 + (N-1)\alpha(1-s)}{1 + (n-1)\alpha(1-s)} \right)^Y \prod_{k=N}^{n-1} (1 + c_k(s));$$

dabei sind $c_N(s), c_{N+1}(s), \dots$ Potenzreihen mit

$$(2.11) \quad \sum_{k=N}^{\infty} \|c_k(s)\| < \infty.$$

Beweis: Wegen $h'(1) = Y\alpha$ und

$$\left(\frac{1 + (N-1)\alpha(1-s)}{1 + (n-1)\alpha(1-s)} \right)^Y = \prod_{k=N}^{n-1} \left(\frac{1 + (k-1)\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^Y = \prod_{k=N}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^Y$$

genügen

$$c_k(s) := \frac{1 - \frac{Y\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} - \left(1 - \frac{\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^Y}{\left(\frac{1 + (k-1)\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^Y}, \quad k = N, N+1, \dots$$

der Gleichung (2.10), und es gilt

$$(2.12) \quad \left\| \left(\frac{1 + (k-1)\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^Y \right\| \geq \left(\frac{1 + (k-1)\alpha}{1 + k\alpha} \right)^Y > 2^{-Y} > 0 \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Mit Hilfe von (2.9) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} & \left\| 1 - \frac{\gamma\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} - \left(1 - \frac{\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^Y \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \binom{Y}{j} \left(- \frac{\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^j \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \binom{Y}{j+2} \left(- \frac{\alpha(1-s)}{1 + k\alpha(1-s)} \right)^j \right\| \\ &\leq \left(\frac{2\alpha}{1 + k\alpha} \right)^2 \Gamma(Y+1) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2\alpha}{1 + k\alpha} \right)^j \\ &= \left(\frac{2\alpha}{1 + k\alpha} \right)^2 \Gamma(Y+1) \frac{1 + k\alpha}{1 + (k-2)\alpha} \\ &\leq 8 \Gamma(Y+1) \alpha^2 (1 + k\alpha)^{-2} \quad \text{für alle } k \geq N. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (2.12) impliziert dies aber (2.11).

q.e.d.

Die Gültigkeit der Produktdarstellung (2.2) wird nun bestätigt durch

Lemma 2.6: Es sei N die in Lemma 2.2 definierte natürliche Zahl. (1.12) sei vorausgesetzt. Dann gibt es eine Konstante M und eine Potenzreihe $\Lambda(n, N, s)$ mit

$$\|\Lambda(n, N, s)\| < M < \infty \quad \text{für alle } n > N,$$

die für alle $s \in D$ der Gleichung (2.2) genügt.

Beweis: Sind $b_k(s)$, $c_k(s)$, $k \geq N$ die Potenzreihen aus den Lemmata 2.4 bzw. 2.5 und setzt man

$$\Lambda(n, N, s) := g_N(s) \prod_{k=N}^{n-1} (1 + b_k(s))(1 + c_k(s)),$$

so folgt die Behauptung sofort aus den zitierten Lemmata.

q.e.d.

Den zweiten Teil des Beweises von Satz 2.1 beginnen wir mit dem einfachen

Lemma 2.7: Für jedes feste k gilt

$$\binom{\gamma + j - k - 1}{j - k} \sim \frac{j^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

Beweis: Dies zeigt man etwa mit Hilfe der asymptotischen Beziehungen (vgl. Abramowitz & Stegun (1965))

$$n! \sim e^{-n} n^n / \sqrt{2\pi n} \quad \text{für } N \ni n \rightarrow \infty$$

und

$$\Gamma(x) \sim e^{-x} x^x / \sqrt{2\pi/x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad \text{q.e.d.}$$

Das asymptotische Verhalten der Potenzreihe $\Lambda(n, N, s)$ wird beschrieben in

Lemma 2.8: (1.12) sei vorausgesetzt. Es sei $\mathcal{J}(s)$ die erzeugende Funktion (1.9 a) des stationären Maßes des vorliegenden GWI - Prozesses, $\Lambda(n, N, s)$ die Potenzreihe aus Lemma 2.6 und

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n, N, j} s^j \equiv \Psi(n, N, s) := \Lambda(n, N, s) (1 + (N-1)\alpha(1-s))^\gamma$$

Dann gilt:

$$(2.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n, N, s) = \mathcal{J}(s) (\alpha(1-s))^\gamma, \quad |s| < 1,$$

die Konvergenz ist gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen des offenen Einheitskreises.

$$(2.14) \quad \mathcal{J}(s) \sim (\alpha(1-s))^{-\gamma} \quad \text{für } s \rightarrow 1 \quad \text{mit } |s| < 1$$

$$(2.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n, N, j} =: \psi_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2.16) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1$$

und

$$(2.17) \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$

Beweis: Es ist nach (2.2)

$$\Psi(n, N, s) = n^\gamma g_n(s) n^{-\gamma} (1 + (n-1)\alpha(1-s))^\gamma,$$

so daß (2.13) sofort aus (1.8) und (1.8 a) folgt. Ebenfalls aus (2.2) er-

sieht man, daß $\psi(n, N, 1) = 1$ für alle $n > N$ ist. Also ist (2.14) eine Konsequenz von Lemma 2.6 und (2.13). (2.15) ergibt sich aus der gleichmäßigen Konvergenz in (2.13) mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel (vgl. Rényi (1966, Seite 121)); (2.16) und (2.17) folgen aus Lemma 2.6.

q.e.d.

Bemerkung 2.3: Bei Pakes (1972, Seite 282 im Beweis von Theorem 2) findet sich (nach einer offensichtlichen Korrektur) die Aussage (2.14) für $s+1$.

Wir sind nun in der Lage, Satz 2.1 zu beweisen.

Beweis von Satz 2.1 im Fall $i=0$: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Lemma 2.8. Durch Koeffizientenvergleich in

$$g_n(s) = \psi(n, N, s) \left(\frac{1}{1 + (n-1)\alpha(1-s)} \right)^Y, \quad n > N$$

erhält man

$$(2.18) \quad P_n(0, j) = \sum_{k=0}^j \psi_{n, N, k} \left(\frac{1}{1 + (n-1)\alpha} \right)^{Y + j - k - 1} \left(\frac{(n-1)\alpha}{1 + (n-1)\alpha} \right)^{j-k},$$

$n > N, j = 0, 1, \dots$

oder

$$P_n(0, j) \alpha^Y \Gamma(Y) \exp\left\{\frac{j}{\alpha n}\right\} n \left(\frac{j}{n}\right)^{1-Y}$$

$$= a_n \sum_{k=0}^j \psi_{n, N, k} b_{k, j} c_{k, j, n}, \quad n > N,$$

wobei

$$a_n = \left(\frac{n\alpha}{1 + (n-1)\alpha} \right)^Y,$$

$$b_{k, j} = \left(\frac{Y + j - k - 1}{j - k} \right) \Gamma(Y) j^{1-Y}$$

und

$$c_{k, j, n} = \exp\left\{\frac{j}{\alpha n}\right\} \left(\frac{(n-1)\alpha}{1 + (n-1)\alpha} \right)^{j-k}$$

gesetzt würde. Für jedes feste k gilt nun:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$(\Delta)_{j, n} \lim_{j, n} c_{k, j, n} = 1$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} b_{k,j} = 1 ,$$

nach Lemma 2.7. Damit ergibt sich wegen (2.15)

$$(2.19) \quad \lim_{(\Delta)_{j,n}} \psi_{n,N,k} a_n b_{k,j} c_{k,j,n} = \psi_k \quad \text{für jedes feste } k \in \mathbb{N}_0 .$$

Hätte man nun die Aussage

$$(2.20) \quad \lim_{(\Delta)_{j,n}} \lim_{j \geq s(j) \geq k(j) \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=k(j)}^{s(j)} \psi_{n,N,k} b_{k,j} c_{k,j,n} = 0$$

für $s(j) = j$, so würde aus (2.19) die Grenzaussage

$$\lim_{(\Delta)_{j,n}} p_n(o,j) \alpha^\gamma \Gamma(\gamma) \exp\left\{-\frac{j}{\alpha n}\right\} n \left(\frac{j}{n}\right)^{1-\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k$$

und wegen (2.16) die Behauptung folgen. Es verbleibt also der Nachweis von (2.20).

Im Fall $\gamma \geq 1$ bleiben sowohl $b_{k,j}$ als auch $c_{k,j,n}$ beim betrachteten Grenzübergang gleichmäßig in k , $0 \leq k \leq j$, beschränkt, so daß (2.20) eine Konsequenz von (2.17) ist.

Im Fall $\gamma < 1$ ist obige Aussage bezüglich $b_{k,j}$ nicht richtig, so daß einige Zusatzüberlegungen erforderlich werden.

Zunächst überzeugt man sich, daß $b_{k,j}$ in k ($k = 0, 1, \dots, j$) monoton wächst und daß $b_{[j/2],j}$ für $j \rightarrow \infty$ konvergiert (gegen $2^{1-\gamma}$) und somit insbesondere beschränkt ist. Wiederum aufgrund von (2.17) bedeutet dies aber:

$$(2.20) \text{ gilt für } s(j) = [j/2] .$$

Zur Abschätzung von

$$(2.21) \quad a_n \sum_{k=[j/2]}^j \psi_{n,N,k} b_{k,j} c_{k,j,n}$$

überlegen wir uns folgendes:

(i) Für $|s| < 1$ ist

$$(1-s)^{-\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\gamma}{k} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma + k - 1) s^k .$$

Folglich ergibt sich aus dem Taubersatz für Potenzreihen (vgl. Feller (1971))

$$\sum_{k=0}^j (\gamma + k - 1) \sim j^\gamma \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1)} \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

(ii) Für $|s| < 1$ existiert die Ableitung von

$$g_n(s) = \psi(n, N, s) \left(\frac{1}{1 + (n-1)\alpha(1-s)} \right)^\gamma \quad \text{für } n > N$$

sicherlich. Wir finden:

$$\begin{aligned} g'_n(s) &= \psi(n, N, s) \gamma \left(\frac{1}{1 + (n-1)\alpha(1-s)} \right)^{\gamma+1} (n-1)\alpha \\ (2.22) \quad &= \psi'(n, N, s) \left(\frac{1}{1 + (n-1)\alpha(1-s)} \right)^\gamma, \quad n > N, |s| < 1. \end{aligned}$$

Durch Differentiation von (1.1) erhalten wir die Beziehung

$$g'_n(1) = n h'(1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

die die Existenz von $\psi'(n, N, 1)$ gewährleistet. Genauer läßt sich in (2.22) ablesen:

$$\psi'(n, N, 1) = n h'(1) - (n-1)\gamma\alpha = h'(1), \quad n > N.$$

Also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \psi_{n, N, k} = \psi'(n, N, 1) = h'(1) < \infty \quad \text{für alle } n > N$$

und damit gilt

$$(2.23) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k \psi_{n, N, k} = 0, \quad \text{gleichmäßig in } n > N.$$

Diese beiden Ergebnisse helfen uns nun bei der Untersuchung von (2.21):

Für alle j, n mit $\frac{j}{n} \leq M'$ gibt es ein $K = K(M') < \infty$ mit

$$|a_n c_{k, j, n}| < K \quad \text{für alle } k \leq j,$$

so daß sich mit

$$\zeta_{n, N, j} := \max\{|\psi_{n, N, k}| \mid k = [j/2], \dots, j\}$$

abschätzen läßt:

$$\begin{aligned} |a_n \sum_{k=[j/2]}^j \psi_{n, N, k} b_{k, j} c_{k, j, n}| \\ \leq K \sum_{k=[j/2]}^j |\psi_{n, N, k}| b_{k, j} \\ \leq K \zeta_{n, N, j} \sum_{k=[j/2]}^j b_{k, j} \leq K' j \zeta_{n, N, j}, \quad \text{nach (i)}. \end{aligned}$$

(2.23) liefert nun aber die gewünschte Konvergenz gegen Null, d.h. es gilt (2.20) mit $s(j) = j$ auch im Fall $\gamma < 1$.

q.e.d.

Wir kommen nun zum

Beweis von Satz 2.1 im Fall $i \geq 1$: Sei also $i \in \mathbb{N}$. Wir gehen aus von der Relation

$$(2.24) \quad P_n(i, j) = \sum_{k=0}^j P_n(0, k) Q_n(i, j-k), \quad j = 0, 1, \dots,$$

von deren Richtigkeit man sich etwa (eine andere Möglichkeit ergibt sich durch j -malige Differentiation der WEF $g_n^{(i)}$ der $P_n(i, j)$, $j = 0, 1, \dots$, in der Darstellung (1.1)) durch die folgende probabilistische Argumentation überzeugen kann:

Das Ereignis " $\chi_n^{(i)} = j$ " ist die disjunkte Vereinigung der $j+1$ Ereignisse "Es sind k der zur Zeit n lebenden j Objekte Nachkommen von eingewanderten Individuen und $j-k$ stammen von den ursprünglich vorhandenen i Objekten ab"

($k = 0, 1, \dots, j$), so daß (2.24) sofort wegen unserer grundsätzlichen Unabhängigkeitsannahmen folgt.

Da sich das asymptotische Verhalten ($n \rightarrow \infty$) von $Q_n(i, r)$ in den Fällen $r=0$ und $r > 0$ grundlegend unterscheidet, es ist

$$(2.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(i, 0) = 1$$

und

$$Q_n(i, r) = O(n^{-2}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{und festes } r \in \mathbb{N},$$

kann man vermuten, daß das $(\Delta)_{j,n}$ -Verhalten der Summe in (2.24) allein durch das des Summanden $P_n(0, j)Q_n(i, 0)$ bestimmt ist, was für die Gültigkeit der nachzuweisenden Beziehung

$$(2.26) \quad P_n(i, j) \underset{(\Delta)_{j,n}}{\sim} P_n(0, j)$$

spricht.

Zunächst sei $\gamma > 1$: Aufgrund der, im Fall $i=0$ bereits gerechtfertigten Bemerkung 2.1 b) kommt es nicht überraschend, daß eine Konstante $A \in A(A')$ existiert, so daß

$$(2.27) \quad \frac{P_n(0, k(j))}{P_n(0, j)} \leq A \quad \text{für alle genügend großen } j, n$$

mit $\frac{j}{n} \leq A'$ und $k(j) \leq j$.

In der Tat hat man im Fall $k(j) \equiv k$

$$\begin{aligned} \frac{P_n(o, k)}{P_n(o, j)} &\underset{(\Delta)_{j, n, A'}}{\sim} \frac{\theta_k}{n^\gamma} \alpha^\gamma \Gamma(\gamma) n \left(\frac{j}{n}\right)^{1-\gamma} \exp\left\{\frac{j}{\alpha n}\right\} \\ &= \theta_k j^{1-\gamma} \alpha^\gamma \Gamma(\gamma) \exp\left\{\frac{j}{\alpha n}\right\} \\ &\xrightarrow{(\Delta)_{j, n, A'}} 0 \end{aligned}$$

und im Fall $j \geq k(j) \rightarrow \infty$

$$\frac{P_n(o, k(j))}{P_n(o, j)} \underset{(\Delta)_{j, n, A'}}{\sim} \left(\frac{k(j)}{j}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{\frac{j - k(j)}{\alpha n}\right\}$$

und folglich (2.27). Damit ergibt sich aber nun für alle hinreichend großen j, n

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{j-1} P_n(o, k) Q_n(i, j-k) &\leq A j P_n(o, j) \sup_{r \geq 1} Q_n(i, r) \\ &\leq A M_1 i^{\frac{1}{2}} j P_n(o, j) \quad \text{nach (1.13)} \\ &\leq A'' \frac{j}{n^2} P_n(o, j) \end{aligned}$$

Im Fall $\gamma < 1$ schätzen wir $\sum_{k=0}^{j-1} P_n(o, k)$ durch 1 nach oben ab und erhalten analog

$$\sum_{k=0}^{j-1} P_n(o, k) Q_n(i, j-k) \leq A''' n^{-2}$$

Beachtet man noch (2.1) im Fall $i=0$ und (2.25), so folgert man mit Hilfe der obigen Abschätzungen in beiden Fällen

$$\lim_{(\Delta)_{j, n}} \frac{\sum_{k=0}^{j-1} P_n(o, k) Q_n(i, j-k)}{P_n(o, j) Q_n(i, 0)} = 0.$$

Damit ergibt sich aber (2.26) aus (2.24) und (2.25). Da (2.1) für $i=0$ bereits nachgewiesen ist, ist Satz 2.1 nunmehr vollständig bewiesen.

q.e.d.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch ein nützliches Ergebnis formulieren, das recht schnell aus (2.2) folgt.

Satz 2.2: Es sei $\xi = \min(\gamma, 1)$. Unter der Voraussetzung (1.12) gilt:

$$(2.28) \quad \sup_{n \geq 1, j \geq 0} n^{\xi} P_n(0, j) < \infty.$$

Beweis: Für positive a und $\epsilon, s \in D$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} r_{a, \epsilon, j} s^j &= \rho(a, \epsilon, s) := \left(\frac{1}{1+a(1-s)} \right)^{\epsilon} \\ &= (1+a)^{-\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\epsilon+k-1}{k} \left(\frac{a}{1+a} \right)^k s^k \end{aligned}$$

eine WEF (nämlich die einer Negativ-Binomial-Verteilung mit Parametern $(\epsilon, \frac{1}{1+a})$), so daß folglich

$$(2.29) \quad \|\rho(a, \epsilon, s)\| = 1.$$

Mit

$$f(n, N, s) := \Lambda(n, N, s) (1 + (N-1)\alpha(1-s))^{\gamma} (1 + (n-1)\alpha(1-s))^{\xi-\gamma}$$

erlaubt (2.2) die Darstellung

$$(2.30) \quad g_n(s) = f(n, N, s) \rho((n-1)\alpha, \xi, s), \quad n > N, s \in D,$$

wobei wegen (2.29) auch im nichttrivialen Fall $\gamma > \xi = 1$

$$\|f(n, N, s)\| < M'' = M''(M, N) < \infty, \quad n > N.$$

(M, N sind die Größen aus Lemma 2.6).

Nun sind (es ist $\xi \leq 1$) die Koeffizienten $r_{(n-1)\alpha, \xi, j}$ von $\rho((n-1)\alpha, \xi, s)$ offensichtlich (für jedes feste $n > N$) monoton fallend in j . Also ergibt sich aus (2.30)

$$(2.31) \quad \sup_{j \geq 0} P_n(0, j) \leq M'' \sup_{j \geq 0} r_{(n-1)\alpha, \xi, j} = M'' \left(\frac{1}{1 + (n-1)\alpha} \right)^{\xi}, \quad n > N$$

und damit

$$n^{\xi} \sup_{j \geq 0} P_n(0, j) \leq M''' = M'''(M'', \alpha, \xi) < \infty, \quad n > N.$$

Daraus folgt aber (2.28).

q.e.d.

Bemerkung 2.4: (1.10) zeigt im Fall $\gamma \leq 1$, daß die Größe $\xi = \gamma$ in (2.28) nicht durch ein $\eta > \xi$ ersetzt werden kann. Dieselbe Aussage folgt im Fall $\gamma > 1$ aus Satz 2.1.

An mehreren Stellen der vorliegenden Arbeit wird sich zeigen, wie nützlich es ist, das $(\Delta)_{j,n}$ - Verhalten von $P_n(i,j)$ zu kennen. Andererseits gibt es aber auch eine Reihe von Situationen, in denen es hilfreich wäre, eine Aussage über das asymptotische Verhalten von $P_n(i,j)$ zu haben, wenn außer j (und n) auch noch i groß wird.

Bei der Beschreibung von $P_n(i,j)$ im Fall "großer i, j und n " im nächsten Paragraphen wird uns Satz 2.1 schon erste Dienste leisten.

§ 3 Das asymptotische Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeit bei variabler Ausgangspopulation

In diesem Paragraphen nehmen wir eine Untersuchung des $(\Delta)_{i,j,n}$ - Verhaltens von $P_n(i,j)$ vor. Dabei benutzen wir die Beziehung (2.24), so daß zunächst eine Aussage über das $(\Delta)_{i,j,n}$ - Verhalten von $Q_n(i,j)$ erforderlich wird.

Wie üblich (vgl. Feller (1971)) bezeichnen wir die "Besselfunktion (der Ordnung ρ) mit rein imaginärem Argument" mit I_ρ , d.h. I_ρ hat für $\rho > -1$ die Potenzreihendarstellung

$$(3.1) \quad I_\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{\Gamma(\rho + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\rho}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.1 Der lokale Grenzwertsatz für den kritischen GW - Prozeß

Mit dem asymptotischen Verhalten von $Q_n(i,j)$, wenn alle drei Variablen groß werden, haben sich bereits Kesten, Ney & Spitzer (1966) beschäftigt. Während wir bei unserem $(\Delta)_{i,j,n,K}$ - Grenzübergang i der Restriktion $\frac{i}{n} \leq K$ unterwerfen, geben sie eine asymptotische Darstellung von $Q_n(i,j)$, die ohne diese Einschränkung Gültigkeit hat. Wir zitieren ihr Ergebnis, mit dessen Hilfe wir unser Resultat herleiten, in Lemma 3.1. Zunächst führen wir aber einige Abkürzungen ein.

$$A_n(i,j) := \frac{1}{an} \exp\left\{-\frac{i+j}{an}\right\} \sqrt{i/j} I_1\left(\frac{2}{an} \sqrt{ij}\right), \quad i,j,n \in \mathbb{N}$$

$$B_n(i,r) := \binom{i}{r} (1 - f_n(0))^r (f_n(0))^{i-r}, \quad i,n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_0, i \geq r$$

$$C_n(i,j,r) := B_n(i,r) \exp\left\{-\frac{j}{an}\right\} \frac{j^{r-1}}{(r-1)!} (an)^{-r}, \quad j,r,n \in \mathbb{N}$$

Lemma 3.1: Es sei $R \geq 1$ und es gelten (1.6) und (1.11). Dann ist

$$(3.2) \quad Q_n(i,j) = \sum_{r=1}^R C_n(i,j,r) + o\left(\frac{1}{n}\right) \min\left(1, \frac{i}{n}\right) + G_n(i,R),$$

wobei

$$G_n(i,R) = O\left(\frac{1}{n\sqrt{R}} \sum_{r=R+1}^i B_n(i,r)\right),$$

für $(\Delta)_{j,n}, i \geq R$.

Der lokale Grenzwertsatz für den kritischen GW - Prozeß lautet nun:

Satz 3.1: Es sei $0 < K < \infty$. Unter den Voraussetzungen (1.6) und (1.11) gilt

$$Q_n(i,j) \underset{(\Delta)_{i,j,n,K}}{\sim} A_n(i,j) .$$

Beweis: Wir geben uns $\epsilon > 0$ beliebig vor und vergleichen zunächst $A_n(i,j)$ mit dem letzten Summanden in (3.2).

(i) Wegen (1.15) gibt es ein $N_1 > 1 + \frac{1}{\alpha} =: \delta$ mit

$$1 - \frac{\delta}{n} \leq f_n(0) \quad \text{für alle } n \geq N_1 .$$

Die i -te Potenz dieser Schranke schätzen wir mit Hilfe der Bernoulli'schen Ungleichung ab

$$1 - \frac{\delta}{n} \leq \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

und finden damit für alle $n \geq N_1$ und alle $i \geq R \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{r=R+1}^i B_n(i,r) &= 1 - \sum_{r=0}^R B_n(i,r) \\ &\leq 1 - B_n(i,0) = 1 - (f_n(0))^i \\ &\leq 1 - \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^i \\ &\leq \delta \frac{i}{n} \end{aligned}$$

Beschränken wir uns nun auf $(i,j,n) \in J_K$ mit $n \geq N_1$ und $i \geq R$, wobei

$$J_K := \{(i,j,n) \in \mathbb{N}^3 \mid \frac{i}{n} \leq K, \frac{j}{n} \leq K\}$$

bedeutet, so können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned} \sum_{r=R+1}^i B_n(i,r) &\leq \delta \frac{i}{n} \leq \delta \alpha \exp\left\{\frac{2K}{\alpha} - \frac{i+j}{\alpha n}\right\} \frac{\sqrt{ij}}{\alpha n} \sqrt{1/j} \\ (3.3) \quad &\leq \alpha n(1+\alpha) \exp\left\{\frac{2K}{\alpha}\right\} A_n(i,j) . \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1 wissen wir aber, daß Konstanten N_2 und M existieren mit

$$\frac{|G_n(i,R)| n \sqrt{R}}{\sum_{r=R+1}^i B_n(i,r)} \leq M \quad \text{für alle } n \geq N_2 .$$

Wegen (3.3) heißt das, daß

$$\frac{|G_n(i, R)|}{A_n(i, j)} \leq M_\alpha(1+\alpha) \exp\left\{\frac{2K}{\alpha}\right\} (\sqrt{R})^{-1}$$

für alle $R \geq 1$ und alle $(i, j, n) \in J_K$ mit $n \geq N' = \max(N_1, N_2)$ und $i \geq R$.
Wir wählen R'' nun so (groß), daß

$$\epsilon \sqrt{R''} \geq M_\alpha(1+\alpha) \exp\left\{\frac{2K}{\alpha}\right\}.$$

Als nächstes vergleichen wir $A_n(i, j)$ mit dem ersten Summanden in (3.2).

(ii) Wir behaupten:

Es gibt ein $R' = R'(\epsilon) > R''$ und ein $N_3 = N_3(\epsilon)$, so daß für alle $(i, j, n) \in J_K$ mit $i, n \geq N_3$ gilt

$$(3.4) \quad 1 - \epsilon \leq \frac{\sum_{r=1}^{R'} C_n(i, j, r)}{A_n(i, j)} \leq 1 + \epsilon.$$

Dies beweisen wir folgendermaßen:

Da I_1 auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert, können wir aufgrund der Darstellung (3.1) $R' > R''$ so bestimmen, daß

$$(3.5) \quad 1 - \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{I_1(2x)} \sum_{k=0}^{R'-1} \frac{1}{k!(k+1)!} x^{2k+1} \leq 1, \quad x \in [0, \frac{K}{\alpha}].$$

Mit Hilfe von (1.15) überlegt man sich leicht, daß für jedes feste $r \in N_0$ gilt

$$B_n(i, r) \underset{i, n, K}{\sim} \frac{1}{r!} \left(\frac{i}{\alpha n}\right)^r \exp\left\{-\frac{i}{\alpha n}\right\};$$

folglich existiert ein $N_3 = N_3(\epsilon)$, so daß für alle $(i, j, n) \in J_K$ mit $i, n \geq N_3$ und alle $r \in \{1, 2, \dots, R'\}$

$$(3.6) \quad (1 - \frac{\epsilon}{2}) D_n(i, j, r) \leq C_n(i, j, r) \leq (1 + \epsilon) D_n(i, j, r).$$

Dabei haben die $D_n(i, j, r)$ ($r = 1, 2, \dots, R'$) die Bedeutung

$$D_n(i, j, r) = \frac{1}{\alpha n} \frac{1}{r!(r-1)!} \left(\frac{i}{\alpha n}\right)^r \left(\frac{j}{\alpha n}\right)^{r-1} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\}$$

und summieren sich auf zu

$$(3.7) \quad \sum_{r=1}^{R'} D_n(i, j, r) = \frac{1}{\alpha n} \sqrt{ij} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \sum_{k=0}^{R'-1} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{\sqrt{ij}}{\alpha n}\right)^{2k+1}.$$

Die erste Ungleichung in (3.6) und (3.7) benutzend, verifiziert man

$$\frac{\sum_{r=1}^{R'} C_n(i, j, r)}{A_n(i, j)} \geq \frac{(1 - \frac{\epsilon}{2})}{I_1(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{ij})} \sum_{k=0}^{R'-1} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{\sqrt{ij}}{\alpha n}\right)^{2k+1}$$

für alle $(i, j, n) \in J_K$ mit $i, n \geq N_3$. Somit liefert die erste Ungleichung in (3.5) die erste in (3.4). Jeweils die oberen Schranken in (3.6) bzw. (3.5) zu Hilfe nehmend, bestätigt man ganz analog die zweite Ungleichung in (3.4).

(iii) Für $(i, j, n) \in J_K$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\min(1, \frac{1}{n})}{A_n(i, j)} &\leq \alpha^2 n \exp\left\{\frac{2K}{\alpha}\right\} \min(1, \frac{1}{n}) \frac{n}{i} \\ &\leq \alpha^2 n \exp\left\{\frac{2K}{\alpha}\right\}, \end{aligned}$$

so daß offensichtlich ein N_4 existiert mit

$$\frac{|\text{mittlerer Summand in (3.2)}|}{A_n(i, j)} \leq \epsilon$$

für alle $(i, j, n) \in J_K$ mit $n \geq N_4$.

Aus (i) - (iii) in Verbindung mit Lemma 3.1 kann man nun schließlich folgern:

$$1 - 3\epsilon \leq \frac{Q_n(i, j)}{A_n(i, j)} \leq 1 + 3\epsilon$$

für alle $(i, j, n) \in J_K$ mit $n > \max(N', N_3, N_4)$, $i > R'$ und j hinreichend groß. Das war aber zu zeigen.

q.e.d.

Bemerkung 3.1: Satz 3.1 bleibt richtig, wenn man auf die Forderung $i \rightarrow \infty$ verzichtet. Für $\frac{i}{j} \rightarrow 0$ (also insbesondere für festes i) gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha n} \sqrt{i/j} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} I_1\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{i/j}\right) \\
 &= \frac{1}{\alpha n} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \sqrt{i/j} \left(\frac{1}{\alpha n} \sqrt{i/j} + o(\sqrt{i/j})\right) \\
 & \stackrel{j \rightarrow 0}{\sim} (\Delta)_{j,n}^{-2} i \exp\left\{-\frac{j}{\alpha n}\right\} .
 \end{aligned}$$

Daß sich beim $(\Delta)_{j,n}$ - Grenzübergang $Q_n(i,j)$ gerade so verhält, ist aber die Aussage von Satz 1.1.

3.2 Der lokale Grenzwertsatz für den kritischen GWI - Prozeß

Mit der Bezeichnung

$$H_n(i,j) := \frac{1}{\alpha n} \left(\frac{j}{i} \right)^{(\gamma-1)/2} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{ij}\right)$$

lautet der lokale Grenzwertsatz für den kritischen GWI - Prozeß:

Satz 3.2: Es sei $0 < K < \infty$. Falls (1.12) erfüllt ist, gilt

$$(3.8) \quad P_n(i,j) \underset{(\Delta)_{i,j,n,K}}{\sim} H_n(i,j) .$$

Der Transparenz halber wollen wir einige Beweisteile als Lemmata formulieren. Zunächst setzen wir noch abkürzend

$$R_n(i,j,k) := P_n(o,k) Q_n(i,j-k) \quad , \quad 0 \leq k \leq j \quad ,$$

bemerken, daß sich damit Gleichung (2.24) folgendermaßen schreibt

$$(3.9) \quad P_n(i,j) = \sum_{k=0}^j R_n(i,j,k)$$

und wiederholen die Definition von J_K aus dem Beweis von Satz 3.1

$$J_K := \left\{ (i,j,n) \in \mathbb{N}^3 \mid \frac{i}{n} \leq K, \frac{j}{n} \leq K \right\} .$$

Lemma 3.2: Die Voraussetzungen von Satz 3.2 seien erfüllt. Dann gibt es eine Konstante M , so daß für alle $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ und alle $(i,j,n) \in J_K$ gilt

$$\frac{1}{H_n(i,j)} \sum_{k=\lceil (1-\epsilon)j \rceil}^{j-1} R_n(i,j,k) \leq M \epsilon$$

Beweis: Verabredung: In diesem und den beiden nächsten Beweisen schreiben wir die eckigen Klammern (meistens) nicht, wollen aber unter ϵj etc. immer $\lceil \epsilon j \rceil$ etc. verstehen.

Mit

$$d := \frac{1}{\Gamma(\gamma) \alpha^\gamma} \exp\left\{-\frac{2K}{\alpha}\right\} > 0$$

ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} \left(\frac{j}{i}\right)^{(\gamma-1)/2} I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{ij}\right) &\geq \left(\frac{j}{i}\right)^{(\gamma-1)/2} \left(\frac{\sqrt{ij}}{\alpha n}\right)^{\gamma-1} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{j}{\alpha n}\right)^{\gamma-1} \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad n H_n(i, j) \geq d \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma-1} \quad \text{für alle } i, j, n \in \mathbb{N}.$$

Weiter garantiert uns der (lokale Grenzwert-) Satz 2.1 die Existenz einer Konstanten M_2 mit der Eigenschaft:

$$P_n(o, k) \leq M_2 k^{\gamma-1} n^{-\gamma} \quad \text{für alle } k, n \text{ mit } \frac{k}{n} \leq K.$$

Folglich ist für alle j, n mit $\frac{j}{n} \leq K$

$$\begin{aligned} \sum_{k=(1-\epsilon)j}^{j-1} P_n(o, k) &\leq M_2 n^{-\gamma} \sum_{k=(1-\epsilon)j}^{j-1} k^{\gamma-1} \\ &\leq M_3 \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma} \epsilon. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (1.13) erhält man damit:

$$\begin{aligned} \sum_{k=(1-\epsilon)j}^{j-1} R_n(i, j, k) &\leq \sup_{r \geq 1} Q_n(i, r) M_3 \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma} \epsilon \\ &\leq M_1 i n^{-2} M_3 \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma} \epsilon \\ &\leq M_1 M_3 K \frac{\epsilon}{n} \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma} \quad \text{für alle } (i, j, n) \in J_K. \end{aligned}$$

Setzt man $M := \frac{1}{d} M_1 M_3 K^2$ so folgt mit Hilfe von (3.10) die Behauptung.

q.e.d.

Die Untersuchung eines "Anfangsabschnitts" der Summe in (3.9) erfolgt in

Lemma 3.3: Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 gibt es eine Konstante M' , so daß für alle $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ und alle $(i, j, n) \in J_K$ gilt

$$\frac{1}{H_n(i, j)} \sum_{k=0}^{\epsilon j} R_n(i, j, k) \leq M' \epsilon^\gamma.$$

Beweis: Es sei M_2 die Konstante aus dem Beweis von Lemma 3.2.

Hier finden wir für alle j, n mit $\frac{j}{n} \leq K$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\epsilon j} P_n(o, k) &\leq M_2 n^{-\gamma} \sum_{k=0}^{\epsilon j} k^{\gamma-1} \\ &\leq M_4 \left(\frac{j}{n}\right)^\gamma \epsilon^\gamma, \end{aligned}$$

so daß man genauso wie in Lemma 3.2 schließen kann.

q.e.d.

Ehe wir zum Beweis von Satz 3.2 kommen, definieren wir noch für

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2}$$

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} x^{\gamma-1} (1-x)^k dx = \lambda(k, \epsilon) \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(k+1)}{\Gamma(\gamma+k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\lambda(-1, \epsilon) \equiv 1$$

eine Funktion λ , für die offensichtlich gilt

$$\lambda(k, 0) = 1 \quad \text{für alle } k = -1, 0, 1, \dots$$

Beweis von Satz 3.2: Für alle $(i, j, n) \in J_K$ und alle $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ gilt,

gleichmäßig in $k \in \{[\epsilon j], [\epsilon j]+1, \dots, [(1-\epsilon)j], j\}$,

$$P_n(o, k)_{(\Delta)_{i, j, n}} = (1 + o(1)) \left(\frac{1}{a^\gamma \Gamma(\gamma)} n^\gamma k^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{k}{an}\right\} \right),$$

aufgrund von Satz 2.1,

$$Q_n(i, j-k)_{(\Delta)_{i, j, n}} = (1 + o(1)) \left(\frac{1}{an} \exp\left\{-\frac{i+j-k}{an}\right\} I_1\left(\frac{2}{an} \sqrt{i(j-k)}\right) \sqrt{\frac{i}{j-k}} \right),$$

wegen Satz 3.1 und

$$Q_n(i, 0) = (1 + o(1)) \exp\left\{-\frac{i}{\alpha n}\right\},$$

$$(\Delta)_{i,j,n}$$

wobei letzteres leicht aus (1.15) folgt. Damit erhält man

$$S_n(i, j, \epsilon) := R_n(i, j, j) + \sum_{k=\epsilon j}^{(1-\epsilon)j} R_n(i, j, k)$$

$$(\Delta)_{i,j,n} = \frac{1}{n}(1 + o(1)) \left[\frac{1}{\alpha^\gamma \Gamma(\gamma)} \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=\epsilon j}^{(1-\epsilon)j} \frac{1}{\Gamma(\gamma) \alpha^{\gamma+1} n^\gamma} k^{\gamma-1} \sqrt{\frac{i}{j-k}} I_1\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{i(j-k)}\right) \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \right].$$

Nun rechnet man nach

$$\sum_{k=\epsilon j}^{(1-\epsilon)j} k^{\gamma-1} \sqrt{\frac{i}{j-k}} I_1\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{i(j-k)}\right)$$

$$= \sum_{k=\epsilon j}^{(1-\epsilon)j} k^{\gamma-1} \sqrt{\frac{i}{j-k}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)!} \left(\frac{1}{\alpha n} \sqrt{i(j-k)}\right)^{2l+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)!} \left(\frac{1}{\alpha n}\right)^{2l+1} i^{l+1} \sum_{k=\epsilon j}^{(1-\epsilon)j} k^{\gamma-1} (j-k)^l$$

und bestätigt durch Riemann-Summenapproximation für $j \rightarrow \infty$ und $l = 0, 1, \dots$

$$\sum_{k=\epsilon j}^{(1-\epsilon)j} k^{\gamma-1} (j-k)^l = (1 + o_1(1)) j^{\gamma+1} \lambda(1, \epsilon) \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(l+1)}{\Gamma(\gamma+l+1)}.$$

Folglich gilt für jedes feste $R \in \mathbb{N}$, mit

$$T_n(i, j, R, \epsilon) := \sum_{l=R+1}^{\infty} \frac{i^{l+1}}{l!(l+1)!} \left(\frac{1}{\alpha n}\right)^{2l+1} \sum_{k=\epsilon j}^{(1-\epsilon)j} k^{\gamma-1} (j-k)^l$$

$$\begin{aligned}
 S_n(i, j, \epsilon) &\equiv S_n(i, j, \epsilon, R) := \frac{1}{n} (1 + o(1)) \left[\frac{1}{\alpha^\gamma \Gamma(\gamma)} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \left(\left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma-1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\alpha n^\gamma} \sum_{l=0}^R \frac{i^{l+1} j^{\gamma+1}}{l! (l+1)!} \left(\frac{1}{\alpha n}\right)^{2l+1} \lambda(1, \epsilon) \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(l+1)}{\Gamma(\gamma+l+1)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\alpha n^\gamma} T_n(i, j, R, \epsilon) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{n} (1 + o(1)) \left[\frac{1}{\alpha^\gamma \Gamma(\gamma)} \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \left\{ 1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{l=0}^R \frac{i^{l+1} j^{l+1}}{(l+1)!} \left(\frac{1}{\alpha n}\right)^{2l+2} \lambda(1, \epsilon) \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+l+1)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{j}{n}\right)^{1-\gamma} \frac{1}{\alpha n^\gamma} T_n(i, j, R, \epsilon) \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{n} (1 + o(1)) \left[\frac{1}{\alpha^\gamma} \left(\frac{j}{n}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \sum_{l=0}^{R+1} \frac{(ij)^l}{l! \Gamma(\gamma+1)} \left(\frac{1}{\alpha n}\right)^{2l} \lambda(1-1, \epsilon) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^{\gamma+1} \Gamma(\gamma) n^\gamma} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} T_n(i, j, R, \epsilon) \right] \\
 &= \frac{1}{n} (1 + o(1)) \left[\frac{1}{\alpha} (\sqrt{j\gamma})^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \sum_{l=0}^{R+1} \frac{\lambda(1-1, \epsilon)}{l! \Gamma(\gamma+1)} \left(\frac{\sqrt{j\gamma}}{\alpha n}\right)^{2l+\gamma-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^{\gamma+1} \Gamma(\gamma) n^\gamma} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} T_n(i, j, R, \epsilon) \right]
 \end{aligned}$$

Diese beiden Summanden vergleichen wir nun mit $H_n(i, j)$, in (i) den letzten und in (ii) den ersten.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \frac{1}{n H_n(i, j)} = \frac{1}{\alpha^{\gamma+1} \Gamma(\gamma) n^\gamma} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} T_n(i, j, R, \epsilon) \\
 & \leq \frac{1}{\alpha n} j^{1-\gamma} T_n(i, j, R, \epsilon) \\
 & \leq \frac{1}{\alpha n} j^{1-\gamma} T_n(i, j, R, 0) \\
 & \leq \frac{j^{1-\gamma}}{n} M_5 \sum_{l=R+1}^{\infty} \frac{i^{l+1} j^{\gamma+1}}{l!(l+1)!} \left(\frac{1}{\alpha n}\right)^{2l+1} \\
 & \leq M_5 \frac{j}{n} \sum_{l=R+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+1)!} \left(\frac{1}{\alpha n} \max(i, j)\right)^{2l+1} \\
 & \leq M_5^K I_{1,R}\left(\frac{2K}{\alpha}\right) \quad \text{für alle } (i, j, n) \in J_K,
 \end{aligned}$$

wobei wir

$$I_{1,R}(2x) := \sum_{k=R+1}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

gesetzt haben. Als "Restsumme" von I_1 ist $I_{1,R}$ für jedes feste Argument für $R \rightarrow \infty$ eine Nullfolge.

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \frac{1}{\alpha n H_n(i, j)} (\sqrt{j/i})^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} \sum_{l=0}^R \frac{\lambda(1-l, \epsilon)}{l! \Gamma(\gamma+1)} \left(\frac{1}{\alpha n} \sqrt{ij}\right)^{2l+\gamma-1} \\
 & = \frac{1}{I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{ij}\right)} \sum_{l=0}^R \frac{\lambda(1-l, \epsilon)}{l! \Gamma(\gamma+1)} \left(\frac{1}{\alpha n} \sqrt{ij}\right)^{2l+\gamma-1}.
 \end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{(\Delta)_{i,j,n}} \frac{S_n(i, j, \epsilon, R)}{H_n(i, j)} \\
 & = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{(\Delta)_{i,j,n}} \frac{S_n(i, j, \epsilon, R)}{H_n(i, j)} = 1.
 \end{aligned}$$

Aus (3.9) ergibt sich in Verbindung mit den Lemmata 3.2 und 3.3 die Behauptung.

q.e.d.

Ganz analog wie in Bemerkung 3.1 ergibt sich aufgrund des Verhaltens von $I_{\gamma-1}(z)$ für $z \rightarrow 0$ mit Hilfe von Satz 2.1 die

Bemerkung 3.2: Satz 3.2 ist auch ohne die Voraussetzung $i \rightarrow \infty$ richtig. Für $(\Delta)_{j,n}$, $i/j \rightarrow 0$ wird das Verhalten von $P_n(i,j)$ durch Satz 2.1 beschrieben.

§ 4 Das asymptotische Verhalten von stationärem Maß und Green'scher Funktion

Das asymptotische Verhalten des stationären Maßes und der Green'schen Funktion des kritischen GW - Prozesses ist umfassend von Kesten, Ney & Spitzer (1966) beschrieben worden. Wir präsentieren ihre Ergebnisse (bis auf eines) in

Satz 4.1: (1.6) und (1.11) seien vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i^0 &= \frac{1}{\alpha} \\
 \lim_{i \rightarrow \infty} G^0(i, j) &= \theta_j^0, \quad j \in \mathbb{N} \\
 \lim_{j \rightarrow \infty} j G^0(i, j) &= \frac{i}{\alpha}, \quad i \in \mathbb{N}_0 \\
 \lim_{j \rightarrow \infty} G^0(j, j) &= 1 + \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned}$$

und für $0 \leq \lambda < \infty$

$$(4.2) \quad \lim_{\substack{i \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty \\ i \neq j, \frac{j}{i} \rightarrow \lambda}} G^0(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{falls } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha\lambda} & \text{falls } 1 \leq \lambda < \infty \end{cases}$$

Mit Ausnahme von (4.1) stammen diese Resultate aus dem zweiten Teil der Arbeit von Kesten, Ney & Spitzer und sind mit Hilfe des (lokalen Grenzwert-) Satzes 1.1 oder unter Einsatz von Lemma 3.1 hergeleitet worden. Mit einfacheren Methoden haben diese Autoren im ersten Teil ihrer Arbeit weniger weitgehende Aussagen machen können. Zu diesen und zu (4.1) hat Pakes (1972), ähnlich wie Kesten, Ney & Spitzer vorgehend, Entsprechungen für den kritischen GWI - Prozeß gefunden. Er beweist (zwei seiner Ergebnisse sind zu korrigieren!):

Satz 4.2: Unter den Voraussetzungen (1.6) und (1.7) gilt:

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\gamma} \sum_{i=0}^n \theta_i = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1) \alpha^\gamma}$$

und falls $\gamma > 1$,

$$(4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n G(i, j) = \frac{1}{(\gamma-1)\alpha}, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

und

$$(4.5) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} i^{\gamma-1} G(i, j) = \alpha^{\gamma-1} \Gamma(\gamma-1) \theta_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Beweisskizze: Durch Anwendung des Tauber-Satzes für Potenzreihen folgt (4.3) sofort aus (2.14). ((2.14) ist auch ohne die Voraussetzung (1.11) richtig; vgl. Pakes (1972)). Ähnlich ergibt sich (4.4) aus dem Verhalten der erzeugenden Funktion G_i von $\{G(i,0), G(i,1), \dots\}$ an der Stelle 1-. Eine Untersuchung von G_i für $i \rightarrow \infty$ verhilft zu (4.5).

Die lokalen Grenzwertsätze der §§ 2 und 3 erlauben uns nun, verfeinerte Angaben über die Asymptotik von G und des stationären Maßes zu machen.

4.1 Das stationäre Maß

Unter der Zusatzannahme (1.11) verallgemeinern wir (4.3) zu

Satz 4.3: Falls (1.12) erfüllt ist, gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j^{1-\gamma} \theta_j = \frac{1}{\alpha^{\gamma} \Gamma(\gamma)} .$$

Beweis: Für $j, n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a(j, n) := |\theta_j j^{1-\gamma} - j^{1-\gamma} n^{\gamma} P_n(o, j)| ,$$

$$b(j, n) := |j^{1-\gamma} n^{\gamma} P_n(o, j) - \frac{1}{\alpha^{\gamma} \Gamma(\gamma)} \exp\{-\frac{j}{\alpha n}\}| ,$$

$$c(j, n) := \frac{1}{\alpha^{\gamma} \Gamma(\gamma)} |\exp\{-\frac{j}{\alpha n}\} - 1|$$

und erhalten damit

$$(4.6) \quad |j^{1-\gamma} \theta_j - \frac{1}{\alpha^{\gamma} \Gamma(\gamma)}| \leq a(j, n) + b(j, n) + c(j, n) .$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

(i) Zunächst wählen wir $d > 0$ so (klein), daß $|\exp\{-\frac{d}{\alpha}\} - 1| < \frac{\epsilon}{3}$ ist. Dann ist

$$c(j, n) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } j, n \text{ mit } \frac{j}{n} \leq d .$$

(ii) Satz 2.1 garantiert uns die Existenz eines j_0 mit der Eigenschaft:

$$b(j, n) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } j \geq j_0 \text{ und alle } n \text{ mit } \frac{j}{n} \leq d .$$

(iii) Wegen (1.10) finden wir schließlich zu jedem $j \geq j_0$ ein $n (= n(j))$ möglicherweise mit

$$a(j, n) < \frac{\epsilon}{3} .$$

Aus (i) - (iii) ergibt sich aber die angestrebte Aussage:

Mit geeignetem $n = n(j)$ ist für alle $j \geq j_0$ die rechte und damit auch die linke Seite in (4.6) kleiner als ϵ .

q.e.d.

4.2 Die Green'sche Funktion

In diesem Abschnitt gelte die Vereinbarung im Beweis von Lemma 3.2 entsprechend.

Für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Green'schen Funktion des GWI - Prozesses benötigen wir

Lemma 4.1: Es gelte (1.12) und es sei $\xi = \min(1, \gamma)$. Dann gibt es eine Konstante $C < \infty$, so daß

$$\sup_{j \geq 0} P_n(i, j) \leq C \left(\frac{1}{1n} \right)^{\xi/2} \quad \text{für alle } i, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Es gibt eine Konstante $0 < d < 1$ mit

$$\frac{d}{\alpha n} \leq 1 - f_n(0) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

(dies folgt aus (1.15) und der Tatsache, daß $f_n(0) < 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.)
so daß

$$\begin{aligned} Q_n(i, 0) &= \left(f_n(0) \right)^i = \exp\{i \log(1 - (1 - f_n(0)))\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{id}{\alpha n}\right\} \\ &\leq \frac{\alpha n}{d} \quad \text{für alle } i, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich mit $D := \max(1, \frac{\alpha}{d})$

$$(4.7) \quad Q_n(i, 0) \leq D \left(\frac{n}{1} \right)^{\xi/2} \quad \text{für alle } i, n \in \mathbb{N}.$$

Aus (2.24), (2.28), (1.14) und (4.7) erhalten wir aber

$$\begin{aligned} \sup_{j \geq 0} P_n(i, j) &\leq \sup_{j \geq 1} Q_n(i, j) + Q_n(i, 0) \sup_{j \geq 0} P_n(0, j) \\ &\leq \frac{M_2}{\sqrt{1n}} + D \left(\frac{n}{1} \right)^{\xi/2} M \left(\frac{1}{n} \right)^{\xi} \\ &\leq C \left(\frac{1}{1n} \right)^{\xi/2} \quad \text{für alle } i, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Wir sind nun bereits in der Lage, ein (4.2) entsprechendes Resultat anzugeben.

Satz 4.4: Es gelte (1.12); weiter sei $\gamma > 1$ und $0 \leq \lambda < \infty$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty \\ i \neq j, \frac{j}{i} \rightarrow \lambda}} G(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(\gamma-1)} & \text{falls } \lambda \geq 1 \\ \frac{1}{\alpha(\gamma-1)} \lambda^{\gamma-1} & \text{falls } 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G(j, j) = 1 + \frac{1}{\alpha(\gamma-1)}.$$

Beweis: Für $\epsilon > 0$ und $1 \leq i \neq j$ zerlegen wir G in der folgenden Weise

$$G(i, j) = S(i, j, \epsilon) + T(i, j, \epsilon),$$

mit

$$S(i, j, \epsilon) := \sum_{n=1}^{[i\epsilon]} P_n(i, j)$$

und

$$T(i, j, \epsilon) := \sum_{n=[i\epsilon]+1}^{\infty} P_n(i, j)$$

und schätzen mit Hilfe von Lemma 4.1 ab:

$$(4.8) \quad S(i, j, \epsilon) \leq C \sum_{n=1}^{[i\epsilon]} (\sqrt{n})^{-1} \leq C' \sqrt{\epsilon}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Nun gilt für alle Summanden von $T(i, j, \epsilon)$

$$\frac{i}{n} < \frac{i}{\epsilon i} = \frac{1}{\epsilon} < \infty$$

und

$$\frac{j}{n} < \frac{j}{\epsilon i} < \frac{\lambda+1}{\epsilon} \quad \text{für genügend große } i, j,$$

so daß ihr $(\Delta)_{i, j, n, (\lambda+1)/\epsilon}$ -Verhalten durch Satz 3.2 beschrieben wird:

$$P_n(i, j) = (1 + o(1)) \frac{1}{\alpha n} \left(\frac{j}{i} \right)^{(\gamma-1)/2} \exp\left\{-\frac{i+j}{\alpha n}\right\} I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{ij}\right)$$

für $i \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$, gleichmäßig in $n > \epsilon i$. Somit finden wir für $j \rightarrow \infty$, $i \rightarrow \infty, \frac{j}{i} \rightarrow \lambda$:

$$\begin{aligned} T(i, j, \epsilon) &= \frac{1 + o(1)}{\alpha} \left(\frac{j}{i} \right)^{(\gamma-1)/2} \sum_{n > \epsilon i} \frac{1}{\alpha n} \exp\left\{-\frac{i}{\alpha n}(1 + \frac{j}{i})\right\} I_{\gamma-1}\left(2 \frac{i}{\alpha n} \sqrt{j/i}\right) \frac{\alpha}{i} \\ &\longrightarrow \frac{1}{\alpha} \lambda^{(\gamma-1)/2} \int_{\alpha \epsilon}^{\infty} x^{-1} \exp\left\{-\frac{1+\lambda}{x}\right\} I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{x} \sqrt{\lambda}\right) dx. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (4.8) ergibt sich hieraus durch den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty \\ i \neq j, \frac{j}{i} \rightarrow \lambda}} G(i, j) = \frac{1}{\alpha} \lambda^{(\gamma-1)/2} \int_0^{\infty} x^{-1} \exp\{-(1+\lambda)x\} I_{\gamma-1}(2\sqrt{\lambda} x) dx$$

$$= \frac{\lambda^{(\gamma-1)/2}}{\alpha(\gamma-1)} \left(\frac{1+\lambda - [(1+\lambda)^2 - 4\lambda]^{1/2}}{2\sqrt{\lambda}} \right)^{\gamma-1}$$

(vgl. Watson (1952) oder Oberhettinger & Badii (1973)). Dies stimmt aber mit dem ersten Teil der Behauptung überein und impliziert (Fall $\lambda=1$) sofort den zweiten.

q.e.d.

Bemerkung 4.1: Ganz genauso wie in Satz 4.4 verfahrend, zeigt man mit Hilfe von Satz 3.1 für $0 \leq \lambda < \infty$

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty \\ i \neq j, \frac{j}{i} \rightarrow \lambda}} G^0(i, j) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} x^{-1} \exp\{-(1+\lambda)x\} I_1(2\sqrt{\lambda} x) dx$$

Das stimmt aber mit dem in (4.2) angegebenen Grenzwert überein.

Den in Satz 4.4 nicht zugelassenen Fall

$$j \rightarrow \infty, \frac{1}{j} \rightarrow 0$$

wollen wir in Satz 4.5 unter die Lupe nehmen. Dies bedarf einiger Vorbereitung.

Lemma 4.2: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $j_0 = j_0(\epsilon)$, so daß für alle $j_0 \leq j \in \mathbb{N}$ gilt

$$P(r, k) \leq \frac{\epsilon}{j} \quad \text{für alle } 0 \leq r \leq \frac{j}{3} \text{ und } k \geq j.$$

Beweis: Kesten, Ney & Spitzer (1966, Seite 538) beweisen unter Voraussetzungen, die durch unsere generellen Annahmen gegeben sind,

$$Q(s, i) \leq \frac{M\sqrt{s}}{(i-s)^2}, \quad \text{für alle } i > s$$

und bekanntlich folgt aus $h'(1-) < \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s P(0, s) = 0.$$

Es seien nun j, r, k wie in der Behauptung. Dann ergibt sich aus (2.24) mit Hilfe der beiden angegebenen Beziehungen:

$$\begin{aligned} P(r, k) &= \sum_{s=0}^{\lfloor j/3 \rfloor} P(0, s) Q(r, k-s) + \sum_{s=\lfloor j/3 \rfloor + 1}^k P(0, s) Q(r, k-s) \\ &\leq \sup_{k-j/3 \leq i \leq k} Q(r, i) + \sup_{j/3 \leq s \leq k} P(0, s) \\ &\leq \frac{M' \sqrt{j}}{j^2} + \sup_{j/3 \leq s \leq k} P(0, s) \\ &\leq \frac{\epsilon}{j} \quad \text{für alle } j \geq j_0, \text{ mit einem geeigneten } j_0 = j_0(\epsilon). \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 4.3: Falls (1.12) erfüllt und $\gamma > 1$ ist, gilt:

Es existiert eine Konstante $K < \infty$ mit

$$\sum_{j=1}^n G(i, j) \leq K n \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Für alle $i, j \geq 0$ gilt

$$G(i, j) \leq G(j, j) \leq K$$

nach Satz 4.4. Dies impliziert aber die Behauptung.

q.e.d.

Genau wie Kesten, Ney & Spitzer definieren wir nun für alle Startzustände $i \geq 0$ eine Folge von Stoppszeiten ($j = 1, 2, \dots$)

$$T_i(j) := \begin{cases} \min \{k \mid k \geq 1, x_k^{(i)} \geq j\} \\ \infty, \text{ falls solch ein } k \text{ nicht existiert} \end{cases}$$

Die $T_i(j)$ sind im Fall $\gamma > 1$ f.s. endlich, denn dann ist der GWI - Prozeß $(x_n^{(i)})_n$ transient; außerdem hat er keine absorbierenden Zustände.

Lemma 4.4: Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.3 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $j_0 = j_0(\epsilon)$, so daß für alle $j \geq j_0$ gilt

$$P(X_{T_i(j/3)}^{(i)} = k) \leq \epsilon \quad \text{für alle } i \leq j/3, k \geq j.$$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben, K die Konstante aus Lemma 4.3 und $j_0 = j_0(\frac{\epsilon}{K})$ die Größe aus Lemma 4.2. Für i, j, k wie in der Behauptung gilt dann

$$\begin{aligned} P(X_{T_i(j/3)}^{(i)} = k) &\leq \sum_{r=0}^{j/3} G(i, r) P(r, k) \\ &\quad \text{(siehe Kesten, Ney & Spitzer (1966, Seite 538))} \\ &\leq \frac{\epsilon}{Kj} \sum_{r=0}^{j-1} G(i, r), \text{ nach Lemma 4.2} \\ &\leq \epsilon, \text{ nach Lemma 4.3.} \end{aligned}$$

q.e.d.

Nun können wir beweisen

Satz 4.5: Es sei $\gamma > 1$; (1.12) sei vorausgesetzt. Dann gilt

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ i \text{ beliebig mit } \frac{i}{j} \rightarrow 0}} G(i, j) = \frac{1}{\alpha(\gamma-1)}.$$

Beweis: Für $\epsilon > 0$ und $i \leq \frac{j}{3}$ zerlegen wir nun

$$G(i, j) = S(i, j, \epsilon) + T(i, j, \epsilon)$$

mit

$$S(i, j, \epsilon) := \sum_{n=1}^{[\epsilon j]} P_n(i, j)$$

und

$$T(i, j, \epsilon) := \sum_{n=[\epsilon j]+1}^{\infty} P_n(i, j).$$

Zunächst schätzen wir $S(i, j, \epsilon)$ ab (wegen der ersten Ungleichung siehe Kesten, Ney & Spitzer (1966, Seite 539)):

$$\begin{aligned}
 S(i, j, \epsilon) &\leq \sum_{r \geq j/3} P(X_{T_i(j/3)}^{(i)} = r) \left(\delta(r, j) + S(r, j, \epsilon) \right) \\
 &= P(X_{T_i(j/3)}^{(i)} = j) + \sum_{r \geq j/3} P(X_{T_i(j/3)}^{(i)} = r) S(r, j, \epsilon) \\
 &\leq P(X_{T_i(j/3)}^{(i)} = j) + \sup_{r \geq j/3} S(r, j, \epsilon) \\
 &\leq P(X_{T_i(j/3)}^{(i)} = j) + C'' \sqrt{\epsilon} ,
 \end{aligned}$$

denn es ist nach Lemma 4.1

$$\begin{aligned}
 S(r, j, \epsilon) &\leq \sum_{n=0}^{\epsilon j} \sup_{l \geq 0} P_n(r, l) \leq C \sum_{n=0}^{\epsilon j} \frac{1}{\sqrt{rn}} \\
 &\leq C' \sqrt{\epsilon j / r} \quad \text{für alle } r, j \in \mathbb{N} .
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 4.4 erhalten wir demnach

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{\substack{j \rightarrow \infty \\ i/j \rightarrow 0}} S(i, j, \epsilon) = 0 .$$

$T(i, j, \epsilon)$ approximieren wir wieder durch ein Riemann-Integral. Dazu verhilft Bemerkung 3.2, denn für alle Summanden von $T(i, j, \epsilon)$ gilt:

$$\frac{j}{n} \leq \frac{j}{\epsilon j} = \frac{1}{\epsilon} < \infty$$

und $\frac{j}{j}$ ist eine Nullfolge. Also ergibt sich für $j \rightarrow \infty$, $\frac{i}{j} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 T(i, j, \epsilon) &= \frac{1 + o(1)}{\alpha \Gamma(\gamma)} \sum_{n \geq \epsilon j} \frac{\alpha}{j} \left(\frac{j}{\alpha n} \right)^\gamma \exp\left\{ -\frac{j}{\alpha n} \right\} \\
 &\xrightarrow[\substack{j \rightarrow \infty \\ i/j \rightarrow 0}]{} \frac{1}{\alpha \Gamma(\gamma)} \int_{\epsilon \alpha}^{\infty} x^{-\gamma} \exp\left\{ -\frac{1}{x} \right\} dx \\
 &\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \frac{1}{\alpha \Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} x^{\gamma-2} \exp\{-x\} dx = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\alpha \Gamma(\gamma)} = \frac{1}{\alpha(\gamma-1)} .
 \end{aligned}$$

Das beweist aber die Behauptung.

q.e.d.

Korollar: Unter den Voraussetzungen von Satz 4.5 gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P(\text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } X_n^{(i)} = j) = \frac{1}{1 + \alpha(\gamma - 1)},$$

$$i = 0, 1, \dots$$

Beweis: Das folgt sofort aus Satz 4.5 und der Beziehung

$$G(i, j) = P(\text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } X_n^{(i)} = j) G(j, j) . \quad \underline{\text{q.e.d.}}$$

Teil II

Der kritische Galton-Watson Prozeß mit Immigration – approximierende Diffusionen und Generationsstruktur

§ 5 Bezeichnungen und Grundlagen

Mit einer Ausnahme, wir schreiben wieder konventionell

$$\begin{aligned} & X_n \mid X_0 = i \quad \text{anstelle von} \quad X_n^{(i)} \\ \text{und} \quad & Z_n \mid Z_0 = i \quad \text{anstelle von} \quad Z_n^{(i)}, \end{aligned}$$

behalten wir in Teil II dieser Arbeit die Bezeichnungsweisen aus dem ersten Teil bei.

Die fundamentalen Bedingungen (1.2) - (1.5) und (1.5a) an die Reproduktions- und Immigrationsverteilung des GWI - Prozesses setzen wir weiterhin als gegeben voraus.

5.1 Bedingte kritische GW - Prozesse

Der kritische GW - Prozeß $(Z_n)_n$ ist in verschiedenen bedingten Situationen studiert worden; Lamperti & Ney (1968) betrachten ihn unter der Bedingung "Nicht ausgestorben", Esty (1976) unter der Bedingung "Noch nicht, aber bald ausgestorben", wobei jeweils noch unterschiedliche Prozeßinitiierungsannahmen gemacht werden. Genauer, Lamperti & Ney beschreiben das Verhalten $(n \rightarrow \infty)$ der endlich-dimensionalen Verteilungen von

$$\left\{ \frac{1}{n} Z_{[nt]}; 0 < t \leq 1 \mid Z_0 = [xn + o(n)], Z_n > 0 \right\}, x \geq 0,$$

während Esty das von

$$\left\{ \frac{1}{n} Z_{[nt]}; 0 < t < c \mid Z_0 = [xn + o(n)], Z_n > 0, Z_{[nc]} = 0 \right\}, x \geq 0, c > 1,$$

für $n \rightarrow \infty$ und $c+1$ analysiert.

Einige Ergebnisse dieser Autoren, die im Zusammenhang mit unseren nachfolgenden Untersuchungen von Interesse sind, wollen wir nun angeben.

Satz 5.1 (Lamperti & Ney (1968)): Es sei $x \geq 0$. Im Sinne der endlich-dimensionalen Verteilungen konvergiert ($n \rightarrow \infty$)

$$\left\{ \frac{1}{\alpha n} Z_{[nt]}; 0 < t \leq 1 \mid Z_0 = [\alpha xn + o(n)], Z_n > 0 \right\}$$

gegen einen Diffusionsprozeß mit Anfangszustand x , mit infinitesimalem Erwartungswert

$$2z \left((1-s) \left[\exp \left\{ \frac{z}{1-s} \right\} - 1 \right] \right)^{-1} =: a_{LN}(s, z), \quad z \geq 0, 0 \leq s < 1$$

und infinitesimaler Varianz

$$2z =: b_{LN}(s, z).$$

Bemerkung 5.1: Die von Lamperti & Ney angegebene infinitesimale Varianz ist falsch; vgl. Bemerkung 6.5.

Satz 5.2 (Lamperti & Ney (1968)): Es seien $0 \leq s < 1$, $0 < t \leq 1-s$ und $x \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} L_{LN}(\theta, t \mid s, x) &:= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\exp \left\{ -\theta \frac{Z_{[n(t+s)]}}{n\alpha} \right\} \mid Z_{[ns]} = [\alpha xn + o(n)], Z_n > 0 \right) \\ &= \begin{cases} \frac{\exp \left\{ -\frac{x}{1-s} \left[(1+\theta t)^{-1} (1+\theta t \frac{1-s-t}{1-s})^{-1} - 1 \right] \right\} - \exp \left\{ -\frac{x}{1-s} \right\}}{1 - \exp \left\{ -\frac{x}{1-s} \right\}} \times \\ \quad \times \exp \left\{ x \frac{1-s-t}{t(1-s)} \left[(1+\theta t \frac{1-s-t}{1-s})^{-1} - 1 \right] \right\}, & \text{falls } x > 0, \\ (1+\theta t)^{-1} (1+\theta t \frac{1-s-t}{1-s})^{-1}, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung 5.2: Die Grenz - Laplace-Transformierte in Satz 5.2 haben wir in suggestiver Weise geschrieben, um die zugehörige Verteilung einer Interpretation zugänglich zu machen; vgl. Lemma 6.4.

Satz 5.3 (Esty (1976)): Es seien s, t und x wie Satz 5.2. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\theta \frac{Z[n(t+s)]}{\alpha n}\} \mid Z_{[ns]} = [\alpha n + o(n)], Z_n > 0, Z_{[nc]} = 0) \\ = (1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s})^{-2} \exp\{x \frac{1-s-t}{t(1-s)} \left[(1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s})^{-1} - 1 \right]\} . \end{aligned}$$

5.2 Die Generationen im GWI - Prozeß

Beim GWI - Prozeß kann man die Individuen nach ihrer Herkunft unterscheiden.

Ein zur Zeit n lebendes Objekt

- ist entweder (i) Nachkomme eines Urvaters des Prozesses,
wir sagen dann: "Es gehört der Generation n an"
- oder (ii)_k Nachkomme eines zur Zeit k eingewanderten Individuums,
wir sagen dann: "Es gehört der Generation $n-k$ an"
 $k = 1, 2, \dots, n-1$;
- oder (iii) selbst Immigrant;
in diesem Fall sagen wir: "Es gehört der Generation 0 an".

Wir bezeichnen

mit $U_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \dots, n$, die Anzahl der zur Zeit n lebenden Objekte der k -ten Generation,

so daß folglich

$$X_n = \sum_{k=0}^n U_k^{(n)}$$

und mit

G_n die Zufallsvariable, die die Generation eines zur Zeit n zufällig aus den X_n vorhandenen Objekten ausgewählten Individuums angibt,

d.h., es ist

$G_n = k$ genau dann, wenn das herausgegriffene Objekt der Teilpopulation $U_k^{(n)}$ angehört, $k = 0, 1, \dots, n$.

In Anlehnung an unsere frühere Notation schreiben wir auch häufig

Z_n anstelle von $U_n^{(n)}$,

setzen also

$$Z_n \equiv U_n^{(n)}.$$

Die Verteilung der Generationen in Verzweigungsprozessen mit Einwanderung ist von Schützhold (1975) untersucht worden. Beim kritischen GWI - Prozeß kommt er in einem Spezialfall zu folgendem Ergebnis:

Satz 5.4: Es sei $\gamma = 1$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} G_n \leq x \mid X_0 = 1\right) = \frac{x}{1-x} \log \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1.$$

Abschließend noch eine Verabredung: Mit dem Schreiben von eckigen Klammern (Entier-Funktion) verfahren wir in den letzten beiden Paragraphen der diesbezüglichen Vereinbarung (Seite 31) entsprechend.

§ 6 Approximierende Diffusionen

Wie aus Satz 5.2 hervorgeht, ist für alle $0 < t \leq 1$ und alle $x \geq 0$

$$(6.1)_t \quad \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \mid Z_0 = \alpha x n + o(n), Z_n > 0$$

($o(n) \geq 1$ falls $x = 0$) asymptotisch ($n \rightarrow \infty$) nichtdegeneriert verteilt, d.h. in Verteilung ist Z_{nt} von der Ordnung n oder genauer, $Z_{nt} = \alpha y n$ mit einem $y \geq 0$, das "entsprechend der Grenzverteilung von $(6.1)_t$ gewichtet ist".

Da diese Aussage den Fall $t = 1$ mit einschließt, erscheint es sinnvoll, in $(6.1)_t$ die Bedingung $Z_n > 0$ durch die Bedingung $Z_n = \alpha y n + o(n)$, $y \geq 0$, zu ersetzen.

Genau dies wollen wir in Abschnitt 6.1 tun. Wir werden zeigen, daß für $0 < t < 1$

$$(6.2)_t \quad \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \mid Z_0 = \alpha x n + o(n), Z_n = \alpha y n + o(n)$$

gegen eine von y (und x) abhängige, nichtdegenerierte Verteilung konvergiert ($n \rightarrow \infty$), die darüberhinaus auch noch in einem (nicht überraschenden Randomisierungs-) Zusammenhang mit der Grenzverteilung von $(6.1)_t$ steht: Man erhält diese, indem man y in der Grenzverteilung von $(6.2)_t$ gemäß der Grenzverteilung von $(6.1)_1$ (im Fall $x = 0$ ist das nach dem exponentiellen Gesetz gerade eine Exponentialverteilung) randomisiert.

Die Hauptergebnisse in Abschnitt 6.1 sind die Sätze 6.1 und 6.3, die erst nach einigen vorbereitenden Lemmata formuliert werden.

In Abschnitt 6.2 werden wir den GWI - Prozeß in einer $(6.2)_t$ entsprechenden bedingten Situation untersuchen.

6.1 Der kritische GW - Prozeß

Im folgenden seien $t_0, t_1, \dots$ reelle Zahlen mit

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots$$

und

$$d_i := t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Wir definieren für $x \geq 0, y \geq 0, v > 0, k \in \mathbb{N}$

$$\text{und } (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_k^+ := \{(y_1, \dots, y_k) \mid y_1 > 0, \dots, y_k > 0\}$$

$$(6.3)_{v,k,t_0,t_{k+1}}$$

$$f_{v,k}(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) :=$$

$$:= \begin{cases} \frac{t_{k+1} - t_0}{d_1 d_{k+1}} \exp\left\{-\frac{x+x_1}{d_1} - \frac{y+x_k}{d_{k+1}} + \frac{x+y}{t_{k+1}-t_0} \left(I_{v-1}\left(\frac{2}{t_{k+1}-t_0} \sqrt{xy}\right)\right)^{-1} \times \right. \\ \quad \times I_{v-1}\left(\frac{2}{d_1} \sqrt{xx_1}\right) I_{v-1}\left(\frac{2}{d_{k+1}} \sqrt{yx_k}\right) \prod_{r=2}^k h_v(x_{r-1}, x_r; t_{r-1}, t_r) \\ \quad \left. \text{falls } x > 0, y > 0, \right. \\ \left(\frac{t_{k+1} - t_0}{d_1} \right)^{v(\sqrt{x_1/y})^{v-1}} \frac{I_{v-1}\left(\frac{2}{d_{k+1}} \sqrt{yx_k}\right)}{d_{k+1}} \prod_{r=2}^k h_v(x_{r-1}, x_r; t_{r-1}, t_r) \times \\ \quad \times \exp\left\{-\frac{x_1}{d_1} - \frac{y+x_k}{d_{k+1}} + \frac{y}{t_{k+1}-t_0}\right\} \\ \quad \left. \text{falls } x = 0, y > 0, \right. \\ \left(\frac{t_{k+1} - t_0}{d_{k+1}} \right)^{v(\sqrt{x_k/x})^{v-1}} \frac{I_{v-1}\left(\frac{2}{d_1} \sqrt{xx_1}\right)}{d_1} \prod_{r=2}^k h_v(x_{r-1}, x_r; t_{r-1}, t_r) \times \\ \quad \times \exp\left\{-\frac{x+x_1}{d_1} - \frac{x_k}{d_{k+1}} + \frac{x}{t_{k+1}-t_0}\right\} \\ \quad \left. \text{falls } x > 0, y = 0, \right. \\ \left(\frac{t_{k+1} - t_0}{d_1 d_{k+1}} \right)^{v(\sqrt{x_1 x_k})^{v-1}} \frac{\exp\left\{-\frac{x_1}{d_1} - \frac{x_k}{d_{k+1}}\right\}}{\Gamma(v)} \prod_{r=2}^k h_v(x_{r-1}, x_r; t_{r-1}, t_r) \\ \quad \left. \text{falls } x = 0, y = 0, \right. \end{cases}$$

mit $h_v(v, w; s, s+t) := \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{v+w}{t}\right\} I_{v-1}\left(\frac{2}{t} \sqrt{vw}\right)$ für $v, w > 0, s \geq 0, t > 0$.

Bemerkung 6.1: Aus

$$I_{\rho-1}(2z) \sim \frac{z^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} \quad \text{für } z \rightarrow 0, \rho > 0$$

ergibt sich sofort für alle $k \in \mathbb{N}$, $v > 0$ und $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_k^+$:

$${}_v f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; 0, y; t_0, t_{k+1}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} {}_v f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}), \quad y \geq 0$$

und

$$\lim_{y \rightarrow 0} {}_v f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) =$$

$${}_v f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, 0; t_0, t_{k+1}), \quad x \geq 0.$$

Bemerkung 6.2: Die oben definierten Funktionen ${}_v f_k(\dots, \dots, \dots, x, y; t_0, t_{k+1})$ stellen im Fall $k=1$, $xy=0$ bekannte Dichten dar; es ist

$${}_v f_1(x_1; t_1; 0, 0; t_0, t_2) = \frac{1}{\Gamma(v)} x_1^{v-1} \left(\frac{t_2 - t_0}{d_1 d_2} \right)^v \exp \left\{ -x_1 \frac{t_2 - t_0}{d_1 d_2} \right\}, \quad x_1 > 0,$$

eine Gamma-Dichte mit Parametern $((t_2 - t_0)/d_1 d_2, v)$,

$$\begin{aligned} {}_v f_1(x_1; t_1; 0, y; t_0, t_2) &= \exp \left\{ -x_1 \frac{t_2 - t_0}{d_1 d_2} - y \frac{d_1}{d_2(t_2 - t_0)} \left(\frac{x_1}{y} \right)^{(v-1)/2} \right\} \times \\ &\times \frac{1}{d_2} \left(\frac{t_2 - t_0}{d_1} \right)^v I_{v-1} \left(\frac{2}{d_2} \sqrt{x_1 y} \right), \quad x_1 > 0, y > 0, \end{aligned}$$

eine randomisierte Gamma-Dichte (vgl. Feller (1971, Seite 58); in der

Gamma-Dichte mit Parametern $\left(\frac{t_2 - t_0}{d_1 d_2}, v+m \right)$ wird die Größe m gemäß einer

Poisson-Verteilung mit Parameter $y \frac{d_1}{d_2(t_2 - t_0)}$ randomisiert).

und

${}_v f_1(x_1; t_1; x, 0; t_0, t_2)$ eine im gleichen Sinne randomisierte Gamma-Dichte

(der Parameter der Poisson-Verteilung ist jetzt allerdings $x \frac{d_2}{d_1(t_2 - t_0)}$).

Lemma 6.1: Die in (6.3) definierte Funktion ${}_v f_k(\dots, \dots, \dots, x, y; t_0, t_{k+1})$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$, $x, y \geq 0$ und $v > 0$ eine k -dimensionale Dichte auf $\mathbb{R}_k^+$.

Beweis: Wegen Bemerkung 6.1 brauchen wir die Behauptung aus Stetigkeitsgründen nur im Fall $xy > 0$ zu zeigen. Dies geschieht durch Induktion über k .

Man erhält mit Hilfe der Formel (vgl. Watson (1952))

$$(6.4) \quad \int_0^{\infty} \exp\{-c^2 t^2\} I_{\rho}(at) I_{\rho}(bt) t dt = \frac{1}{2} c^{-2} \exp\left\{\frac{a^2+b^2}{4c^2}\right\} I_{\rho}\left(\frac{ab}{2c^2}\right), \quad \rho > -1$$

für $k = 1$ eine Induktionsbasis. Beim Induktionsschluß von k auf $k+1$ rechnet man unter Benutzung von (6.4) nach

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} {}_{\nu}f_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}; t_1, \dots, t_{k+1}; x, y; t_0, t_{k+2}) dx_{k+1} &= \\ &= {}_{\nu}f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+2}) \end{aligned}$$

und wendet hierauf die Induktionsvoraussetzung an.

q.e.d.

Wir führen nun noch einige Bezeichnungen ein:

Die zur Dichte ${}_{\nu}f_k$ gehörige Verteilungsfunktion bezeichnen wir mit ${}_{\nu}F_k$, d.h. wir definieren für $k \in \mathbb{N}$, $x, y \geq 0$ und $\nu > 0$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} {}_{\nu}F_k(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) &:= \\ &\int_0^{z_k} \dots \int_0^{z_1} {}_{\nu}f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) dx_1 \dots dx_k. \end{aligned}$$

Weiter setzen wir

$$\gamma_n(t) := \frac{1}{an} Z_{[nt]}, \quad t > 0$$

und

$$S := \{i \mid i \in \mathbb{N}, \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } Q_n(1, i) > 0\}$$

Bemerkung 6.3: Wie man sich leicht überlegt ist

$$S = \mathbb{N}, \text{ wenn } p_1 \neq 0;$$

gilt (1.11), so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$S \supseteq \{m, m+1, m+2, \dots\}.$$

Lemma 6.2: (1.6) und (1.11) seien vorausgesetzt. Weiter seien $x, y \geq 0$ und r und l Funktionen mit ganzzahligen Werten und den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} l(n) &= o(n); \quad r(n) = o(n); \quad (n \rightarrow \infty) \\ l(n) &\geq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } x = 0; \\ r(n) &\in S \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } y = 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}_k^+$

$$\begin{aligned} F_{k,n}(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) &:= \\ P(Y_n(t_1) \leq z_1, \dots, Y_n(t_k) \leq z_k \mid Z_{nt_0} = \alpha x n + l(n), Z_{nt_{k+1}} = \alpha y n + r(n)) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2^F_k(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Beweis: Es ist $F_{k,n}(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1})$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j_k=0}^{\alpha n z_k} \dots \sum_{j_1=0}^{\alpha n z_1} P(Z_{nt_1} = j_1, \dots, Z_{nt_k} = j_k \mid Z_{nt_0} = \alpha x n + l(n), Z_{nt_{k+1}} = \alpha y n + r(n)) \\ &= \sum_{j_k=1}^{\alpha n z_k} \dots \sum_{j_1=1}^{\alpha n z_1} \frac{Q_{nd_1}(\alpha x n + l(n), j_1) \prod_{r=2}^k Q_{nd_r}(j_{r-1}, j_r) Q_{nd_{k+1}}(j_k, \alpha y n + r(n))}{Q_{n(t_{k+1}-t_0)}(\alpha x n + l(n), \alpha y n + r(n))}. \end{aligned}$$

Zunächst überlegen wir uns, daß für genügend großes N

$$F_{k,n}(\epsilon, \dots, \epsilon; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) = o(1)$$

für $\epsilon > 0$, gleichmäßig in $n \geq N$. Dazu schätzen wir mit Hilfe von (1.14) ab

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad Q_{nd_r}(j_{r-1}, j_r) &\leq M(nd_r j_{r-1})^{-1/2} \quad \text{für } j_r \in \mathbb{N}, r = 2, \dots, k \\ \text{(ii)} \quad Q_{nd_{k+1}}(j_k, \alpha y n + r(n)) &\leq M(nd_{k+1} j_k)^{-1/2} \quad \text{für } \alpha y n + r(n) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Eine Abschätzung von

$$R_n(j_1) := \frac{Q_{nd_1}(\alpha x n + l(n), j_1)}{Q_{n(t_{k+1}-t_0)}(\alpha x n + l(n), \alpha y n + r(n))}$$

gewinnen wir, indem wir uns das asymptotische Verhalten des Nennerterms ansehen.

(iii) Es wird in den Fällen

$$(\alpha) \quad x \geq 0, y > 0$$

$$(\beta) \quad x \geq 0, y = 0, r(n) \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

in Satz 3.1 bzw. in Bemerkung 3.1 beschrieben. Im verbleibenden Fall

(γ) $x \geq 0, y = 0$, es gibt eine Teilfolge $(n_m)_m$ der natürlichen Zahlen mit $(r(n_m))_m$ bleibt beschränkt

zieht man die Relation (vgl. Athreya & Ney (1972, Seite 23) für festes i)

$$(6.6) \quad Q_{nt}(i, j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{i}{a(nt)^2} \theta_j^0 \exp\left\{-\frac{i}{a(nt)}\right\}$$

$S \ni j$ fest
 $\frac{i}{n}$ bleibt beschränkt

zu Rate, und beachtet, daß aufgrund unserer Voraussetzungen $\theta_j^0 \geq \delta > 0$ für alle $j \in S$, δ geeignet.

Schätzt man nun den Zähler von $R_n(j_1)$ mit Hilfe von (1.13) ab, so findet man in Verbindung mit dem in (iii) beschriebenen asymptotischen Verhalten des Nenners:

Es gibt Konstanten L und N , so daß

$$R_n(j_1) < L \quad \text{für alle } j_1 \geq 1 \text{ und alle } n \geq N.$$

Zusammen mit (i) und (ii) bedeutet das aber

$$F_{k,n}(\epsilon, \dots, \epsilon; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) \leq L'(M\sqrt{\epsilon})^k$$

für alle hinreichend großen n . Diese Aussage hatten wir eingangs angestrebt.

Mit $\epsilon < \min(z_1, \dots, z_k)$ erhalten wir aber im Fall $xy > 0$ mit Hilfe von Satz 3.1 für $n \rightarrow \infty$

$$F_{k,n}(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1}) - F_{k,n}(\epsilon, \dots, \epsilon; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1})$$

$$\begin{aligned} &= (1 + o(1)) \sum_{j_k=\epsilon n}^{anZ_k} \dots \sum_{j_1=\epsilon n}^{anZ_1} \frac{1}{and_1} \sqrt{\frac{(\alpha n+1)(n)}{j_1}} \exp\left\{-\frac{1}{and_1}(\alpha n+1)(n)+j_1\right\} \times \\ &\times I_1\left(\frac{2}{and_1} \sqrt{j_1(\alpha n+1)(n)}\right) \prod_{r=2}^k \left\{ \frac{1}{and_r} \sqrt{j_{r-1}j_r} \exp\left\{-\frac{1}{and_r}(j_{r-1}+j_r)\right\} \times \right. \\ &\times \left. I_1\left(\frac{2}{and_r} \sqrt{j_{r-1}j_r}\right) \right\} \frac{I_1\left(\frac{2}{and_{k+1}} \sqrt{j_k(\alpha n+1)(n)}\right)}{I_1\left(\frac{2}{and_{k+1}} \sqrt{j_k(\alpha n+1)(n)}\right)} \cdot \frac{t_{k+1}-t_0}{d_{k+1}} \times \\ &\times \sqrt{j_k/(\alpha n+1)(n)} \exp\left\{-\frac{1}{and_{k+1}}(j_k+\alpha n+1)(n) + \frac{\alpha n+1(n)+\alpha n+1(n)}{an(t_{k+1}-t_0)}\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1+o(1)) \sum_{j_k \in \epsilon n}^{anz_k} \dots \sum_{j_1 \in \epsilon n}^{anz_1} \frac{t_{k+1}-t_0}{d_1 d_{k+1}} (an)^{-k} \frac{I_1\left(\frac{2}{d_1} \sqrt{x \frac{j_1}{an}}\right) I_1\left(\frac{2}{d_{k+1}} \sqrt{y \frac{j_k}{an}}\right)}{I_1\left(\frac{2}{(t_{k+1}-t_0)^{xy}}\right)} \times \\
 &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{d_1}\left(x+\frac{j_1}{an}\right) - \frac{1}{d_{k+1}}\left(y+\frac{j_k}{an}\right) + \frac{x+y}{t_{k+1}-t_0}\right\} \times \\
 &\quad \times \prod_{r=2}^k \frac{1}{d_r} \exp\left\{-\frac{1}{d_r}\left(\frac{j_{r-1}}{an} + \frac{j_r}{an}\right)\right\} I_1\left(\frac{2}{d_r} \sqrt{\frac{j_{r-1}}{an} \frac{j_r}{an}}\right).
 \end{aligned}$$

Dies ist nun aber eine Riemann-Summe, die für $n \rightarrow \infty$ und $\epsilon \rightarrow 0$ gegen ${}_2F_k(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1})$ konvergiert. Ganz analog kommt man in den Fällen (β) , $x > 0$ bzw. (α) , (β) , $x = 0$ zum Ziel, indem man Satz 3.1 bzw. Bemerkung 3.1 benutzt, während man im Fall (γ) (6.6) verwendet.

q.e.d.

Lemma 6.3: Für alle $x, y \geq 0$, $v > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und alle $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_k^+$ gilt

$$\frac{{}_v f_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}; t_1, \dots, t_{k+1}; x, y; t_0, t_{k+2})}{{}_v f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+2})} = \frac{{}_v f_2(x_k, x_{k+1}; t_k, t_{k+1}; x, y; t_0, t_{k+2})}{{}_v f_1(x_k; t_k; x, y; t_0, t_{k+2})}$$

und

$$\frac{{}_v f_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}; t_1, \dots, t_{k+1}; x, y; t_0, t_{k+2})}{{}_v f_k(x_2, \dots, x_{k+1}; t_2, \dots, t_{k+1}; x, y; t_0, t_{k+2})} = \frac{{}_v f_2(x_1, x_2; t_1, t_2; x, y; t_0, t_{k+2})}{{}_v f_1(x_2; t_2; x, y; t_0, t_{k+2})}.$$

Insbesondere ist für $0 < s < 1$, $0 < t < 1-s$

$$\begin{aligned}
 {}_v g_y(v, w; s, t) &:= \frac{{}_v f_2(v, w; s, s+t; x, y; 0, 1)}{{}_v f_1(v; s; x, y; 0, 1)} = \\
 &= \begin{cases} \left(\frac{1-s}{t(1-s-t)}\right)^v \frac{w^{v-1}}{\Gamma(v)} \exp\left\{-\frac{w(1-s)}{t(1-s-t)}\right\} & \text{falls } v = y = 0, \\ \left(\frac{1-s}{t}\right)^v \frac{1}{1-s-t} \left(\frac{w}{y}\right)^{(v-1)/2} I_{v-1}\left(\frac{2}{1-s-t} \sqrt{yw}\right) \exp\left\{-\frac{yt^2 + w(1-s)^2}{t(1-s)(1-s-t)}\right\} & \text{falls } v = 0, y > 0, \\ \left(\frac{1-s}{1-s-t}\right)^v \frac{1}{t} \left(\frac{w}{v}\right)^{(v-1)/2} I_{v-1}\left(\frac{2}{t} \sqrt{vw}\right) \exp\left\{-\frac{v(1-s-t)^2 + w(1-s)^2}{t(1-s)(1-s-t)}\right\} & \text{falls } v > 0, y = 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1-s}{t(1-s-t)} \frac{I_{v-1}\left(\frac{2}{1-s-t}\sqrt{yw}\right) I_{v-1}\left(\frac{2}{t}\sqrt{vw}\right)}{I_{v-1}\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{yv}\right)} \exp\left\{-\frac{yt^2 + v(1-s-t)^2 + w(1-s)^2}{t(1-s)(1-s-t)}\right\} \right|$$

falls $y > 0, v > 0$.

und für $0 < s < 1, 0 < t < s$

$$\frac{{}_v f_2(w, v; s-t, s; x, y; 0, 1)}{{}_v f_1(v; s; x, y; 0, 1)} = {}_v g_x(v, w; 1-s, t).$$

Beweis: Dies ergibt sich sofort aus der speziellen (faktoriisierten) Form der ${}_v f_k$.

q.e.d.

Die bisherigen Ergebnisse fassen wir zusammen in

Satz 6.1: Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.2 gilt:

Die endlich-dimensionalen Verteilungen von

$$\{Y_n(t) = \frac{1}{\alpha n} Z_{[nt]}; 0 \leq t \leq 1 \mid Z_0 = \alpha x n + l(n), Z_n = \alpha y n + r(n)\}$$

konvergieren gegen diejenigen eines Markov'schen Prozesses

$$\{Y_{x,y}(t); 0 \leq t \leq 1\} \text{ mit } Y_{x,y}(0) = x \text{ und } Y_{x,y}(1) = y.$$

Die gemeinsame Dichte von $(Y_{x,y}(t_1), \dots, Y_{x,y}(t_k))$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $t_k < 1$ durch (6.3)_{2,k,0,1} gegeben; die Übergangsdichten haben die Gestalt

$$f_y(w, s+t|v, s) = {}_2 g_y(v, w; s, t), \quad 0 \leq s < 1, 0 < t < 1-s$$

$$f_x(w, s-t|v, s) = {}_2 g_x(v, w; 1-s, t), \quad 0 < s \leq 1, 0 < t < s.$$

Beweis: Da die ${}_2 F_k$ in Lemma 6.2 ein kompatibles System von Verteilungsfunktionen bilden (man beachte hierbei den Induktionsschritt im Beweis von Lemma 6.1), bestimmen sie einen stochastischen Prozeß, der wegen Lemma 6.3 Markov'sch (in beiden Richtungen) ist und die dort angegebenen Übergangsdichten hat.

q.e.d.

Als nächstes wollen wir uns die Laplace-Transformierte der Zufallsvariablen $Y_{x,y}(t)$ aus Satz 6.1 ansehen.

Wir machen einen etwas allgemeineren Ansatz und finden unter den Voraussetzungen von Lemma 6.2:

Korollar 6.1:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\theta \frac{Z_n(t+s)}{\alpha n}\} \mid Z_{ns} = l(n), Z_n = r(n)) \\ = \left(1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}\right)^{-2}, \quad 0 \leq s < 1, 0 \leq t \leq 1-s; \end{aligned}$$

d.h. es liegt Verteilungskonvergenz gegen die Summe zweier unabhängiger exponential-verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert

$$\frac{t(1-s-t)}{1-s} \text{ vor.}$$

Korollar 6.2: Es sei $0 \leq s < 1, x, y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\theta \frac{Z_n(t+s)}{\alpha n}\} \mid Z_{ns} = \alpha x n + l(n), Z_n = r(n)) \\ = \left(1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}\right)^{-2} \exp\left\{x \frac{1-s-t}{t(1-s)} \left(\frac{1}{1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}} - 1\right)\right\}, \quad 0 < t \leq 1-s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\theta \frac{Z_n(t+s)}{\alpha n}\} \mid Z_{ns} = l(n), Z_n = \alpha y n + r(n)) \\ = \left(1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}\right)^{-2} \exp\left\{y \frac{t}{(1-s)(1-s-t)} \left(\frac{1}{1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}} - 1\right)\right\}, \quad 0 \leq t < 1-s. \end{aligned}$$

Im Vergleich zur Situation in Korollar 6.1 "kommt hier noch ein unabhängiger Summand, nämlich eine Poisson-Anzahl unabhängiger exponential-verteilter Zufallsvariablen hinzu". Die Exponential-Variablen haben jeweils den Erwartungswert $\frac{1-s-t}{1-s}$, während der der Poisson-Variablen $x \frac{1-s-t}{t(1-s)}$ in a) und $\frac{yt}{(1-s)(1-s-t)}$ in b) ist.

Korollar 6.3: Es sei $0 \leq s < 1, x, y > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\theta \frac{Z_n(t+s)}{\alpha n}\} \mid Z_{ns} = \alpha x n + l(n), Z_n = \alpha y n + r(n)) \\ = \left(1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}\right)^{-1} \exp\left\{\frac{yt^2 + x(1-s-t)^2}{(1-s)t(1-s-t)} \left(\frac{1}{1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}} - 1\right)\right\} \times \\ \times \frac{I_1\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xy}\left(1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}\right)^{-1}\right)}{I_1\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xy}\right)} \\ =: L(\theta, t|s, x, y), \quad 0 < t < 1-s. \end{aligned}$$

(Den Grenzwert in Korollar 6.2b) bezeichnen wir mit $L(\theta, t|s, 0, y)$).

Die Grenzverteilung stimmt hier überein mit der Verteilung einer Summe

unabhängiger, mit Parameter $\left(t \frac{1-s-t}{1-s}\right)^{-1}$ exponential-verteilter Zufallsvariabler. Die Anzahl der Summanden ist dabei die zufällige Größe

$$1 + N + B,$$

wobei N eine Poisson-Variable mit Parameter $\frac{yt^2 + x(1-s-t)^2}{(1-s)t(1-s-t)}$ und B eine (von N unabhängige) Zufallsvariable mit WEF

$$b_{x,y}(z) := \frac{I_1\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xy}z\right)}{I_1\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xy}\right)}$$

ist; beachtenswert sind die Eigenschaften:

$$b_{x,y}^{(2r)}(0) = 0 \quad \text{für } r \in \mathbb{N}_0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} b_{x,y}(z) = \lim_{y \rightarrow 0} b_{x,y}(z) = z.$$

Bemerkung 6.4: Wie ein Vergleich von Satz 5.3 und Korollar 6.2 a) zeigt, führen die Esty-Bedingung "Aussterben" kurz nach "der Zeit n " und die Bedingung "Zur Zeit n sind $o(n)$ (≥ 1) Objekte vorhanden" zum selben Ergebnis.

Den eingangs angedeuteten Zusammenhang zwischen der Grenzverteilung in Korollar 6.3 und der in Satz 5.2 bereiten wir vor durch

Lemma 6.4: Die zu der Laplace-Transformierten $L_{LN}(\theta, 1-s|s, x)$ aus

Satz 5.2 gehörige Verteilung hat

im Fall $x = 0$ die Dichte

$$w_{0,s}(z) := \frac{1}{1-s} \exp\left[-\frac{z}{1-s}\right]$$

und

im Fall $x > 0$ die Dichte

$$w_{x,s}(z) := \frac{1}{1-s} \sqrt{x/z} I_1\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xz}\right) \frac{\exp\left[-\frac{x+z}{1-s}\right]}{1 - \exp\left[-\frac{x}{1-s}\right]}, \quad z > 0.$$

Beweis: Das kann man bei Lamperti & Ney (1968) nachlesen oder durch Nachweis der Beziehung

$$\int_0^\infty \exp\{-\theta z\} w_{x,s}(z) dz = L_{LN}(\theta, 1-s|s, x), \quad x \geq 0,$$

bestätigen. Anschaulicher (und konstruktiv) ist allerdings folgende probabilistische Argumentation:

Sind $V_1, V_2, \dots$ unabhängige, mit Parameter $\frac{1}{1-s}$ exponential-verteilte Zufallsvariable, und ist M eine von den V_j , $j = 1, 2, \dots$, unabhängige zufällige Größe mit

$$P(M=r) = \frac{1}{r!} \left(\frac{x}{1-s} \right)^r \exp \left\{ - \frac{x}{1-s} \right\} \left(1 - \exp \left\{ - \frac{x}{1-s} \right\} \right)^{-1}, \quad x > 0, r \in \mathbb{N},$$

d.h. M ist eine Poisson-Variablen mit Parameter $\frac{x}{1-s}$, bedingt ≥ 1 , so hat die Zufallssumme $V_1 + \dots + V_M$ gerade die Laplace-Transformierte $L_{LN}(\theta, 1-s | s, x)$. Folglich ist die zugehörige Dichte, also $w_{x,s}$, eine (in offensichtlicher Weise) randomisierte Gamma-Dichte (vgl. Bemerkung 6.2).

q.e.d.

Satz 6.2: Es gilt für alle $x \geq 0$, $0 \leq s < 1$, $0 < t \leq 1-s$

$$\int_0^\infty L(\theta, t | s, x, y) w_{x,s}(y) dy = L_{LN}(\theta, t | s, x).$$

Beweis: Das kann man mit Hilfe bekannter Integralformeln (vgl. Abramowitz & Stegun (1965)) direkt bestätigen.

Das probabilistische Argument aber ist eleganter. Es gilt

$$\begin{aligned} E \left(\exp \left\{ - \theta \frac{Z_n(t+s)}{\alpha n} \right\} \mid Z_{ns} = \alpha x n + 1(n), Z_n > 0 \right) \\ = E \left\{ E \left(\exp \left\{ - \theta \frac{Z_n(t+s)}{\alpha n} \right\} \mid Z_{ns} = \alpha x n + 1(n), Z_n > 0 \right) \mid \frac{Z_n}{\alpha n} \right\} \\ = \int_0^\infty E \left(\exp \left\{ - \theta \frac{Z_n(t+s)}{\alpha n} \right\} \mid Z_{ns} = \alpha x n + 1(n), Z_n = \alpha y n, Z_n > 0 \right) \times \\ \times dP \left(\frac{Z_n}{\alpha n} \leq y \mid Z_{ns} = \alpha x n + 1(n), Z_n > 0 \right), \end{aligned}$$

so daß die Behauptung sofort aus Satz 5.2, Korollar 6.3 und Lemma 6.4 folgt.

q.e.d.

Im folgenden werden wir zeigen, daß es sich bei dem stochastischen Prozeß in Satz 6.1 um einen Diffusionsprozeß handelt.

Dazu definieren wir zunächst für $0 \leq s < 1$ und $v > 0$

$${}_v c_y(s, z) := \begin{cases} 2 - v - \frac{2z}{1-s} + \frac{2\sqrt{yz}}{1-s} \frac{I_{v-2} \left(\frac{2\sqrt{zy}}{1-s} \right)}{I_{v-1} \left(\frac{2\sqrt{zy}}{1-s} \right)}, & \text{falls } y > 0, z > 0, \\ v - \frac{2z}{1-s}, & \text{falls } y = 0, z \geq 0, \\ v, & \text{falls } y > 0, z = 0. \end{cases}$$

Satz 6.3: Es seien $x, y \geq 0$.

Der Markov'sche Prozeß $\{Y_{x,y}(t); 0 \leq t \leq 1\}$ mit $Y_{x,y}(0) = x$, $Y_{x,y}(1) = y$ aus Satz 6.1 ist ein Diffusionsprozeß mit dem infinitesimalen Erwartungswert

$$a_y^+(s, z) := 2c_y(s, z), \quad 0 \leq s < 1$$

und der infinitesimalen Varianz

$$b_y(s, z) := 2z.$$

Für den infinitesimalen Erwartungswert "in der anderen Richtung", d.h. für

$$a_x^-(s, v) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (w-v) f_x(w, s-t|v, s) dw$$

gilt

$$a_x^-(s, z) = 2c_x(1-s, z), \quad 0 < s \leq 1.$$

Beweis: Um nachzuweisen, daß der vorliegende Prozeß ein Diffusionsprozeß ist, genügt es zu zeigen (vgl. Prabhu (1965)), daß

$$(6.7) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|w-v| > \delta} (w-v)^2 f_y(w, s+t|v, s) dw = 0 \quad \text{für alle } \delta > 0,$$

$$(6.8) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (w-v) f_y(w, s+t|v, s) dw = a_y^+(s, v)$$

und

$$(6.9) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (w-v)^2 f_y(w, s+t|v, s) dw = b_y(s, v).$$

Aus Stetigkeitsgründen brauchen wir (6.7) nur im Fall $xy > 0$ zu verifizieren. Wegen

$$(2l)! \leq (2^l l!)^2$$

ist

$$I_1(2x) \leq x \sum_{l=0}^{\infty} (l!)^{-2} x^{2l} \leq x e^{2x}$$

und damit

$$\begin{aligned} f_y(w, s+t|v, s) &\leq \\ &\leq \frac{(1-s)w\sqrt{vy}}{t^2(1-s-t)^2 I_1(\frac{2}{1-s}\sqrt{vy})} \exp\left\{-\frac{yt^2 + v(1-s-t)^2 + w(1-s)^2}{t(1-s)(1-s-t)} + \frac{2\sqrt{wy}}{1-s-t} + \frac{2\sqrt{vw}}{t}\right\} \\ &= \frac{(1-s)w\sqrt{yv}}{t^2(1-s-t)^2 I_1(\frac{2}{1-s}\sqrt{vy})} \exp\left\{-\frac{(\sqrt{v}(1-s-t) - \sqrt{w}(1-s) + \sqrt{y}t)^2 - 2\sqrt{yv}t(1-s-t)}{t(1-s)(1-s-t)}\right\} \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung folgt aber (6.7). Die Integrale in (6.8) und (6.9)

kann man mit einiger Mühe (wegen dafür benötigter Integrationsformeln siehe etwa Watson (1952)) direkt bestimmen; einfacher ist es allerdings, die Laplace-Transformierte $L(\theta, t | s, v, y)$ zu Hilfe zu nehmen. Die nun benötigten Differentiationsformeln für Besselfunktionen findet man ebenfalls bei Watson (1952). q.e.d.

Bemerkung 6.5: a) Aufgrund von Satz 6.2 kann man den in Satz 5.1 angegebenen infinitesimalen Erwartungswert des Lamperti-Ney'schen Diffusionsprozesses aus der Beziehung

$$\int_0^{\infty} a_y^+(s, z) w_{z,s}(y) dy = a_{LN}(s, z)$$

bestimmen. Ähnliches gilt für die infinitesimale Varianz. In Übereinstimmung mit Satz 5.2 bestätigt man

$$b_{LN}(s, z) = 2z = b_y(s, z) .$$

b) Wie nach Bemerkung 6.4 nicht anders zu erwarten, stimmen $Y_{x,0}(t)$ und der bei Esty (1976) auftretende Diffusionsprozeß (Bedingungen und Grenzübergänge wie in Satz 5.3) überein.

Das Verhalten des infinitesimalen Erwartungswerts in einigen speziellen Situationen geben wir an in

Bemerkung 6.6: Aus dem entsprechenden Verhalten der Besselfunktionen ergibt sich sofort:

- a) $\lim_{y \rightarrow \infty} a_y^+(s, y) = 0$
- b) $a_y^+(s, z) \sim \frac{2\sqrt{z}}{1-s} \sqrt{y} \quad \text{für } y \rightarrow \infty, \quad z > 0$
- c) $a_y^+(s, z) \sim -\frac{2z}{1-s} \quad \text{für } z \rightarrow \infty$
- d) $a_y^+(s, z) \sim \frac{2}{1-s} (\sqrt{zy} - z) \quad \text{für } s \uparrow 1$
- e) $a_y^+(\frac{1}{2}, y) = a_y^-(\frac{1}{2}, y) ,$

d.h. also z.B.: a) "Größenstagnation großer Populationen auf lange Sicht hat auch ein momentanes Nullwachstum zur Folge";

c) "'Große' Populationen reagieren auf ein zukünftiges 'Kleinsein' mit einem linearen Rückgang".

Wir bemerken noch, daß man die obigen Überlegungen (siehe insbesondere Satz 6.1) für beliebiges $t \geq 0$ durchführen kann. In Korollar 6.3 etwa ist man für $t > 1$ wegen der Markov-Eigenschaft von $(Z_n)_n$ in der von Lamperti (1967) beschriebenen Situation, so daß eine zu oben analoge Vorgehensweise nur eine schreibtechnische Angelegenheit ist.

Die Frage nach der Vergrößerung des Definitionsbereiches des Lamperti-Ney'schen Diffusionsprozesses läßt sich natürlich auch stellen. Eine Behandlung macht keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Ein kleines Resultat in dieser Richtung wollen wir noch anführen.

Satz 6.4: Es sei $t > 1$ und $x \geq 0$. Die Voraussetzungen von Lemma 6.2 seien erfüllt. Wir setzen

$$d(0, t) := \frac{t-1}{t} + \frac{1}{t(1+\theta t)} ;$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\exp\left\{-\frac{\theta}{\alpha n} Z_{nt}\right\} \mid Z_0 = \alpha x n + 1(n), Z_n > 0\right) = \\ & = \begin{cases} d(0, t) & \text{falls } x = 0, \\ \frac{\exp\{x(d(0, t) - 1)\} - \exp\{-x\}}{1 - \exp\{-x\}} & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis: Die Sätze 3.1 und 1.1 benutzend, zeigt man, daß die betrachtete Laplace-Transformierte ein (uneigentliches) Riemann-Integral approximiert, das den angegebenen Wert hat.

q.e.d.

Wie man aus obiger (Grenz-) Laplace-Transformierter ersieht, liegt im Fall $x = 0$ Verteilungskonvergenz gegen eine Zufallsvariable vor, die mit Wahrscheinlichkeit $(t-1)/t$ gleich Null und mit Wahrscheinlichkeit $1/t$ eine Exponential-Variable mit Erwartungswert t ist.

Die Interpretation des Resultats im Fall $x > 0$ ist dann klar (vgl. Beweis von Lemma 6.4).

6.2 Der kritische GWI - Prozeß

In diesem Abschnitt untersuchen wir das asymptotische Verhalten des kritischen GWI - Prozesses unter Bedingungen, die von derselben Bauart sind, wie die im oben behandelten GW - Fall. Wegen (1.17) oder der Tatsache, daß

$$E(X_n | X_0 = j) = nh'(1) + j, \quad j \in \mathbb{N}_0$$

ist, kann man sie gewissermaßen als "natürlich" ansehen.

In Abschnitt 6.1 waren unsere Hilfsmittel fast ausschließlich die (lokalen Grenzwert-) Sätze 1.1 und 3.1; im vorliegenden Fall leisten die Sätze 2.1 und 3.2 analoge Dienste, so daß wir die folgenden Resultate ohne Beweis angeben.

Satz 6.5: (1.12) sei vorausgesetzt. Es seien $x, y \geq 0$ und l und r Funktionen mit ganzzahligen Werten und den folgenden Eigenschaften:

$$l(n) = o(n); \quad r(n) = o(n); \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$l(n) \geq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } x = 0;$$

$$r(n) \in S' \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } y = 0,$$

wobei $S' := \{i \mid i \in \mathbb{N}_0, \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } P_n(0, i) > 0\}$.

(Wegen (1.10) und Satz 4.3 gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $S' \supseteq \{m, m+1, m+2, \dots\}$; außerdem ist offensichtlich $0 \in S'$).

Es gilt: Die endlich-dimensionalen Verteilungen von

$$\{W_n(t) := \frac{1}{\alpha n} X_{[nt]}; \quad 0 \leq t \leq 1 \mid X_0 = \alpha x n + l(n), \quad X_n = \alpha y n + r(n)\}$$

konvergieren gegen diejenigen eines (Markov'schen) Diffusionsprozesses

$$\{W_{x,y}(t); \quad 0 \leq t \leq 1\} \quad \text{mit } W_{x,y}(0) = x, \quad W_{x,y}(1) = y,$$

infinitesimalem Erwartungswert

$$I_{a_y}^+(s, z) = {}_Y c_y(s, z), \quad 0 \leq s < 1$$

$$(\quad I_{a_x}^-(s, z) = {}_Y c_x(1-s, z), \quad 0 < s \leq 1 \quad ; \text{ vgl. Satz 6.3}),$$

infinitesimaler Varianz

$$I_{b_y}^b(s, z) = 2z$$

und den Übergangsdichten

$$I_{f_y}(w, s+t | v, s) = {}_Y g_y(v, w; s, t), \quad 0 \leq s < 1, \quad 0 < t < 1-s,$$

$$I_{f_x}(w, s-t | v, s) = {}_Y g_x(v, w; 1-s, t), \quad 0 < s \leq 1, \quad 0 < t < s.$$

Die gemeinsame Dichte von $(W_{x,y}(t_1), \dots, W_{x,y}(t_k))$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $t_k < 1$ durch (6.3)_{Y, k, 0, 1} gegeben.

Korollar 6.4: Unter den Voraussetzungen von Satz 6.5 gilt für alle $0 \leq s < 1$, $0 < t < 1-s$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\frac{\theta}{\alpha n} X_{n(t+s)}\} \mid X_{ns} = \alpha n + l(n), X_n = \alpha n + r(n)) =$$

$$= \begin{cases} (\psi(\theta, t, s))^{-y} \exp\left\{\frac{yt}{(1-s)(1-s-t)} \left((\psi(\theta, t, s))^{-1} - 1\right)\right\} & \text{falls } x = 0, y \geq 0, \\ (\psi(\theta, t, s))^{-y} \exp\left\{\frac{x(1-s-t)}{t(1-s)} \left((\psi(\theta, t, s))^{-1} - 1\right)\right\} & \text{falls } x \geq 0, y = 0, \\ (\psi(\theta, t, s))^{-1} \exp\left\{\frac{yt^2 + x(1-s-t)^2}{(1-s)t(1-s-t)} \left((\psi(\theta, t, s))^{-1} - 1\right)\right\} \times \\ \times \frac{I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xy}(\psi(\theta, t, s))^{-1}\right)}{I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xy}\right)} & \text{falls } x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$=: L(\theta, t|s, x, y) \quad ,$$

wobei

$$\psi(\theta, t, s) := 1 + \theta t \frac{1-s-t}{1-s}$$

gesetzt wurde. Im Fall $xy > 0$ bedeutet das: Es liegt Verteilungskonvergenz gegen die Zufallsvariable

$$G + V_1 + V_2 + \dots + V_B + U_1 + U_2 + \dots + U_C$$

vor, wobei

G eine Gamma-Variable mit Parametern $\left(\frac{t(1-s)}{1-s-t}, \gamma\right)$,

C eine Poisson-Variable mit Parameter $\frac{yt^2 + x(1-s-t)^2}{t(1-s)(1-s-t)}$,

B eine Zufallsvariable mit WEF

$$b_{\gamma, x, y}(z) = \frac{1}{I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{1-s}\sqrt{xy}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\gamma+k)} \left(\frac{1}{1-s}\sqrt{xy}\right)^{2k+\gamma-1} z^{2k}$$

ist und

$V_1, V_2, \dots, U_1, U_2, \dots$ Exponential-Variable mit Erwartungswert $t \frac{1-s-t}{1-s}$

und alle auftretenden Zufallsvariablen unabhängig sind.

Um ein Satz 6.2 entsprechendes Ergebnis im GWI-Fall angeben zu können, überlegen wir uns:

Aufgrund der dem GWI-Prozeß zugrundeliegenden Unabhängigkeitsannahmen folgt mit dem Resultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\frac{\theta}{\alpha n} Z_{nt}\} | Z_0 = \alpha x n + l(n)) = \exp\{-\frac{\theta x}{1+\theta t}\}$$

von Lamperti (1967) und (1.17) für $0 \leq s < 1$, $t > 0$, $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\frac{\theta}{\alpha n} X_{n(t+s)}\} | X_{ns} = \alpha x n + l(n)) &= \\ &= (1+\theta t)^{-\gamma} \exp\{\frac{x}{t}(1+\theta t) - 1\} \\ &=: {}_Y L(\theta, t | s, x) . \end{aligned}$$

Die zu der Laplace-Transformierten $\exp\{\frac{x}{t}(1+\theta t) - 1\}$ gehörige Verteilung hat Masse $\exp\{-\frac{x}{t}\}$ in der Null und auf $(0, \infty)$ die bedingte Dichte

$$(6.10) \quad d_{t,x}(z) := \frac{1}{t} \sqrt{x/z} I_1(\frac{2}{t} \sqrt{xz}) \exp\{-\frac{x+z}{t}\} \left(1 - \exp\{-\frac{x}{t}\}\right)^{-1} .$$

Folglich hat die zu ${}_Y L(\theta, t | s, x)$ gehörige Verteilung die Dichte

$$(6.11) \quad d_{Y,t,x}(w) = \int_0^w d_{t,x}(z) f_{1/t,\gamma}(w-z) dz (1 - \exp\{-\frac{x}{t}\}) + f_{1/t,\gamma}(w) \exp\{-\frac{x}{t}\} ,$$

$w > 0$,

wobei $f_{1/t,\gamma}$ die Gamma-Dichte mit Parametern $(\frac{1}{t}, \gamma)$ bezeichnet.

Das Faltungsintegral in (6.11) kann man angeben (Erdélyi et al. (1954)); man erhält

$$\begin{aligned} d_{Y,t,x}(w) &= \frac{x w^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \left(\frac{1}{t}\right)^{\gamma+2} \exp\{-\frac{x+w}{t}\} {}_1F_2(1; 2, \gamma+1; t^{-2} w x) + \\ &+ \frac{w^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{1}{t}\right)^\gamma \exp\{-\frac{x+w}{t}\} , \quad w > 0 , \end{aligned}$$

wobei ${}_1F_2(a; b, c; \cdot)$ die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion mit Parametern $a; b, c$ bedeutet (vgl § 7).

Es besteht nun der folgende Randomisierungszusammenhang:

Satz 6.6: Für alle $x \geq 0$, $0 \leq s < 1$, $0 < t < 1-s$ gilt

$$(6.12) \quad \int_0^\infty {}_Y L(\theta, t | s, x, y) d_{Y,1-s,x}(y) dy = {}_Y L(\theta, t | s, x) .$$

Beweis: Dies ergibt sich sofort durch eine probabilistische Argumentation ähnlich wie im Beweis von Satz 6.2.

q.e.d.

Bemerkung 6.7: Im Fall $x = 0$ läßt sich (6.12) leicht durch direktes Integrieren bestätigen. Im Fall $x > 0$ bekommt man es gleich mit zwei Integraltypen zu tun, die in Integraltafeln nicht zu finden sind, so daß man sich auf diesem Wege von der Gültigkeit von (6.12) nicht überzeugen kann. Andererseits kann man (6.12) nicht dazu verwenden, diese Integrale anzugeben; obige Beziehung sagt lediglich etwas über ihre Summe aus. Zum Abschluß dieses Abschnitts vergleichen wir noch das asymptotische Verhalten von GW- und GWI-Prozeß in verschiedenen bedingten Situationen in Abhängigkeit von γ .

Bemerkung 6.8: a) Es gilt (Satz 5.2 und (1.17))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\frac{\theta}{\alpha n} Z_{nt}\} \mid Z_0 = 1, Z_n > 0) = (1 + \theta t)^{-1} (1 + \theta t(1-t))^{-1}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\frac{\theta}{\alpha n} X_{nt}\} \mid X_0 = 1) = (1 + \theta t)^{-\gamma},$$

d.h. die Grenzverteilungen stimmen im Fall $t = 1, \gamma = 1$ überein, im Fall $t < 1, \gamma = 1$ aber bereits nicht mehr.

b) Unter der Voraussetzung (1.12) stellt sich Gleichheit der Grenzverteilungen ein im Fall $\gamma = 2$ z.B. in der folgenden Situation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\frac{\theta}{\alpha n} Z_{nt}\} \mid Z_0 = 1, Z_n = r(n)) = (1 + \theta t(1-t))^{-2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\frac{\theta}{\alpha n} X_{nt}\} \mid X_0 = 1, X_n = r(n)) = (1 + \theta t(1-t))^{-\gamma}$$

(wir nehmen an, daß $o(n) = r(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$), d.h. die Konsequenz der Bedingung $Z_n = r(n)$ für die Grenzverteilung von $\frac{1}{\alpha n} Z_{nt}$ ist dieselbe wie die der Bedingung $X_n = r(n)$, bei einer Immigrationsrate von 2α , für die Grenzverteilung von $\frac{1}{\alpha n} X_{nt}$.

§ 7 Die Verteilung der Generationen im kritischen GWI - Prozeß

In diesem Paragraphen interessieren wir uns für die Generationsstruktur im kritischen GWI-Prozeß.

In Abschnitt 7.1 verallgemeinern wir Satz 5.4 auf den Fall $\gamma \neq 1$, unter den etwas stärkeren Voraussetzungen der lokalen Grenzwertsätze von Teil I, die wiederum als beweistechnisches Hilfsmittel eingesetzt werden.

In Abschnitt 7.2 schließlich beantworten wir die Frage: Wie sieht die asymptotische Verteilung von Z_{nt} ($n \rightarrow \infty$, $t > 0$), der Anzahl der Nachkommen der Urväter des GWI-Prozesses $(X_m)_m$ zur Zeit nt , aus, gegeben X_n , die Anzahl der zur Zeit n insgesamt vorhandenen Individuen?

Wie in der einschlägigen Literatur üblich (vgl. Slater (1966)), bezeichnen wir für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit ${}_n F_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z)$, definiert durch

$${}_n F_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z) = \frac{\Gamma(b_1) \times \dots \times \Gamma(b_m)}{\Gamma(a_1) \times \dots \times \Gamma(a_n)} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+k) \times \dots \times \Gamma(a_n+k)}{\Gamma(b_1+k) \times \dots \times \Gamma(b_m+k)} z^k,$$

die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion mit Parametern $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m$.

7.1 Die Generationsstruktur

Wir starten unseren GWI-Prozeß mit einer festen Anzahl von Individuen, setzen also voraus, daß für ein $l_0 \in \mathbb{N}_0$

$$P(X_0 = l_0) = 1$$

ist, und behaupten

Satz 7.1: Unter der Voraussetzung (1.12) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} G_n \leq x\right) = x {}_2F_1(1, 1; \gamma+1; 1-x), \quad 0 < x \leq 1.$$

Beweis: Es sei $0 < x < 1$ und

$$S_x^{(n)} = \sum_{r=0}^{[nx]} U_r^{(n)}$$

die Anzahl der zur Zeit n lebenden Objekte, die Immigranten sind oder von Immigranten, die zur Zeit $n - [nx]$ oder später eingewandert sind, abstammen. Dann gilt für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} P(S_x^{(n)} = k, X_n = j) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(S_x^{(n)} = k, X_{n-[nx]} - 1 = l, X_n = j) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P(X_n = j | X_{n-[nx]} - 1 = l, S_x^{(n)} = k) P(S_x^{(n)} = k | X_{n-[nx]} - 1 = l) \times \\ &\quad \times P(X_{n-[nx]} - 1 = l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} Q_{[nx]+1}(1, j-k) P_{[nx]+1}(0, k) P_{n-[nx]-1}(1_0, 1) . \end{aligned}$$

Nun ist aber (vgl. Schützhold (1975)), bedingt $X_n > 0$,

$$(7.1) \quad P\left(\frac{1}{n} G_n \leq x\right) = E\left[\frac{S_x^{(n)}}{X_n}\right] ;$$

(Wegen (1.17) weiß man, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > 0) = 1$ ist; somit ist die Bedingung " $X_n > 0$ " asymptotisch irrelevant und (7.1) nur auf P-Nullmengen nicht erklärt.); folglich gilt die Grenzwertbeziehung

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} G_n \leq x\right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{k}{j} P(S_x^{(n)} = k, X_n = j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{k}{j} \sum_{l=0}^{\infty} Q_{nx}(1, j-k) P_{nx}(0, k) P_{n(1-x)}(1_0, 1), \end{aligned}$$

und wir können das Problem der Grenzwertbestimmung mit Hilfe der lokalen Grenzwertsätze von Teil I angehen. Satz 2.2, (1.13) und (1.14) benutzend, überzeugt man sich durch Abschätzung von 'Anfangs- und Endabschnitten' obiger Reihen, daß 'genau die Summanden, deren asymptotisches Verhalten durch die lokalen Grenzwertsätze beschrieben wird, den 'wesentlichen' Beitrag zum Grenzwert leisten' und findet:

$$\begin{aligned} (i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} P_{nx}(0, j) \sum_{l=0}^{\infty} Q_{nx}(1, 0) P_{n(1-x)}(1_0, 1) &= \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)\Gamma(\gamma)} \left(\frac{z}{1-x}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{z}{x(1-x)}\right\} dz = x^{\gamma} . \end{aligned}$$

(ii) Integralformeln aus Erdélyi et al. (1954) und Exton (1978) helfen im folgenden weiter.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{j} \sum_{l=0}^{\infty} Q_{nx}(1, j-k) P_{nx}(0, k) P_{n(1-x)}(l_0, 1) \\
 = \frac{1}{(\Gamma(\gamma))^2 x^{\gamma+1} (1-x)^{\gamma}} \int_0^{\infty} \int_0^v \int_0^{\infty} \frac{w^{\gamma} z^{\gamma-1} \sqrt{z}}{v \sqrt{v-w}} \exp\left\{-\frac{v}{x} - \frac{z}{x(1-x)}\right\} \times \\
 \times I_1\left(\frac{2}{x} \sqrt{z(v-w)}\right) dz dw dv \\
 = \frac{\gamma(1-x)}{x\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} \int_0^v \frac{w^{\gamma}}{v} \exp\left\{-\frac{v}{x}\right\} {}_1F_1(\gamma+1; 2; \frac{1}{x}(1-x)(v-w)) dw dv \\
 = \frac{\gamma(1-x)}{x\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} \frac{1}{v} \exp\left\{-\frac{v}{x}\right\} \int_0^v (v-w)^{\gamma} {}_1F_1(\gamma+1; 2; \frac{w}{x}(1-x)) dw dv \\
 = \frac{(1-x)^{\gamma}}{x\Gamma(\gamma+2)} \int_0^{\infty} v^{\gamma} \exp\left\{-\frac{v}{x}\right\} {}_2F_2(1, \gamma+1; \gamma+2, 2; (1-x)\frac{v}{x}) dv \\
 = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (1-x) x^{\gamma} {}_3F_2(1, \gamma+1, \gamma+1; \gamma+2, 2; 1-x) .
 \end{aligned}$$

Addition der Terme in (i) und (ii) ergibt

$$x^{\gamma} {}_2F_1(\gamma, \gamma; \gamma+1; 1-x) ,$$

so daß aus der Beziehung

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z)$$

in der Tat die Behauptung folgt.

q.e.d.

Man überzeugt sich leicht, daß im Fall $\gamma = 1$ die Aussagen der Sätze 5.4 und 7.1 übereinstimmen. Für zwei weitere γ -Werte vereinfacht sich die hypergeometrische Funktion in Satz 7.1:

Korollar 7.1: Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1 gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} G_n \leq x\right) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x} \left(1 + \frac{x}{1-x} \log x\right) , & \text{falls } \gamma = 2 \\ \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2} \arcsin \sqrt{1-x} , & \text{falls } \gamma = \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Mit Hilfe von Satz 7.1 können wir nun leicht Aussagen über die Verteilung der Generationen (nach langer Zeit) in kritischen GWI-Prozessen mit 'großem' bzw. 'kleinem' γ machen. Die Abhängigkeit von G_n von γ machen wir deutlich, indem wir

$$G_n(\gamma) = G_n$$

setzen.

Satz 7.2: Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1 gilt:

$$(7.2) \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} G_n(\gamma) \leq x\right) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$(7.3) \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} G_n(\gamma) \leq x\right) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Beweis: Das folgt sofort aus

$${}_2F_1(1, 1; 1; 1-x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1$$

bzw.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} {}_2F_1(1, 1; \gamma+1; 1-x) = 1, \quad 0 < x \leq 1.$$

q.e.d.

Bemerkung 7.1: Aufgrund der Tatsache, daß

$$(X_n)_n \text{ für } \gamma \leq 1 \text{ nullrekurrent ist,}$$

ist (7.2) zu erwarten.

Die asymptotische Gleichverteilung der Generationen in (7.3) stellt sich ein, wenn die Varianz der Nachkommensverteilung klein im Vergleich zur erwarteten Anzahl von Einwanderern pro Generation ist. Das erscheint nicht unlogisch.

7.2 Die Nachkommen der Urväter

Wir präzisieren die am Anfang dieses Paragraphen gestellte Frage:

Es seien $x, y \geq 0$, $t > 0$ und l und r Funktionen mit ganzzahligen Werten und den in Satz 6.5 geforderten Eigenschaften. Ist dann

$$(7.4) \quad \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \mid X_0 = \alpha x n + l(n), X_n = \alpha y n + r(n)$$

für $n \rightarrow \infty$ konvergent in Verteilung? Wenn ja, wie sieht die Grenzverteilung aus?

Auf diese Fragen wollen wir eine Antwort geben. Dabei konzentrieren wir uns ganz auf den Fall $xy > 0$, so daß wir $l \equiv r \equiv 0$ setzen können. In Abhängigkeit von t sind die drei Fälle $xy = 0$ meist uninteressant, durch entsprechenden Grenzübergang aber jedenfalls aus unseren Ergebnissen ableitbar.

Ab sofort seien $x > 0, y > 0$

vorgegeben. Sämtliche nachfolgenden Verteilungen hängen von x und y ab; der Bequemlichkeit halber deuten wir das durch die Wahl unserer Bezeichnungen jedoch nicht an.

Bei der Untersuchung des Grenzverhaltens von (7.4) behandeln wir die Fälle $t < 1$, $t = 1$ und $t > 1$ getrennt. Die Beweise der untenstehenden Aussagen basieren wieder auf den lokalen Grenzwertsätzen des ersten Teils dieser Arbeit und den Abschätzungen (1.13), (1.14), Satz 2.2 und Lemma 4.1. Die aufgeschriebenen Beweise sind als Beweisskizzen zu verstehen.

Zunächst studieren wir den Fall $t = 1$; aus Gründen, die nachfolgend deutlich werden, machen wir einen etwas allgemeineren Ansatz und symbolisieren, abweichend von der gerade erfolgten Ankündigung, die y -Abhängigkeit der sich einstellenden Grenzverteilung von (7.4).

Satz 7.3: (1.12) sei vorausgesetzt. Dann gilt für alle $s > 0$:

In Verteilung konvergiert ($n \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{\alpha n} Z_{ns} \mid X_0 = \alpha x n, X_{ns} = \alpha y n$$

gegen eine Zufallsvariable ${}_s W$ mit

$$\begin{aligned} P({}_s W = 0) &= \left(\frac{1}{s\sqrt{xy}}\right)^{\gamma-1} \left(\Gamma(\gamma) I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{s\sqrt{xy}}\right)\right)^{-1} \\ &=: {}_s p_{1,y} ; \end{aligned}$$

bedingt $s > 0$ hat $s W$ auf $(0, y)$ die Dichte

$$s^{w_{1,y}}(z) := \frac{s^{p_{1,y}}}{1 - s^{p_{1,y}}} \frac{(y-z)^{\gamma-1} \sqrt{x}}{s^{\gamma-1} \sqrt{z}} I_1\left(\frac{2}{s} \sqrt{xz}\right), \quad 0 < z < y.$$

Beweis: Es sei $0 < v < y$. Man bestätigt für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & P\left(0 < \frac{1}{\alpha n} Z_{ns} \leq v \mid X_0 = \alpha x n, X_{ns} = \alpha y n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha y n} \frac{Q_{ns}(\alpha x n, j) P_{ns}(0, \alpha y n - j)}{P_{ns}(\alpha x n, \alpha y n)} \\ &= (1+o(1)) \sum_{j=1}^{\alpha y n} \frac{\sqrt{x/y}^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma) s^{\gamma} I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{s} \sqrt{xy}\right)} \frac{1}{\alpha n} \left(y - \frac{j}{\alpha n}\right)^{\gamma-1} I_1\left(\frac{2}{s} \sqrt{xj/\alpha n}\right) \sqrt{x \alpha n / j} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\Gamma(\gamma)} s^{-\gamma} \left(\frac{x}{y}\right)^{(\gamma-1)/2} \left(I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{s} \sqrt{xy}\right)\right)^{-1} \int_0^v (y-z)^{\gamma-1} \frac{1}{\sqrt{z}} I_1\left(\frac{2}{s} \sqrt{xz}\right) dz. \end{aligned}$$

Die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_{ns} = 0 \mid X_0 = \alpha x n, X_{ns} = \alpha y n) = s^{p_{1,y}}$$

verifiziert man leicht, so daß insgesamt die Behauptung folgt. q.e.d.

Bemerkung 7.2: a) Die Bestimmung eines Integrals vom Riemann-Liouville-Typ (vgl. Erdélyi et al. (1954)) ist als Nebenprodukt des Beweises von Satz 7.3 abgefallen. Aus der Tatsache, daß $1^{w_{1,y}}$ Dichte auf $(0, y)$ ist, läßt sich sofort der Wert von

$$\int_0^y z^{-1/2} (y-z)^{\gamma-1} I_1(a\sqrt{z}) dz$$

für $a > 0$ angeben.

b) $s^{w_{1,y}}$ ist eine randomisierte Beta-Dichte:

Offensichtlich ist für $s > 0$

$$r'_k(s, y) := \left(I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{s} \sqrt{xy}\right) k! \Gamma(\gamma+k)\right)^{-1} \left(\frac{1}{s} \sqrt{xy}\right)^{2k+\gamma-1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$ und

$$b_{\gamma, k, y}(v) := \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(k)} (y-v)^{\gamma-1} v^{k-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{\gamma+k-1}, \quad 0 < v < y$$

die Beta-Dichte auf $(0, y)$ mit Parametern γ und k ($k, \gamma > 0$). Nun rechnet

man leicht nach

$$s_{1,y}^{w_1}(v) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\gamma,k,y}(v) r_k(s,y), \quad 0 < v < y,$$

wobei

$$r_k(s,y) := \frac{r'_k(s,y)}{1 - r'_0(s,y)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

gesetzt ist.

Satz 7.4: Wenn (1.12) erfüllt ist, gilt für alle $0 < t < 1$:

$$\frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n$$

konvergiert ($n \rightarrow \infty$) in Verteilung gegen eine Zufallsvariable W_t mit

$$(7.5) \quad P(W_t = 0) = {}_1p_{1,y} \exp\left\{-\frac{x}{t}(1-t)\right\} \\ =: p_t;$$

bedingt > 0 hat W_t auf $\mathbb{R}^+$ eine Dichte, w_t , die auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden kann:

$$(7.6) \quad w_t(z) = \frac{p_t}{1-p_t} \exp\left\{-\frac{z}{t(1-t)}\right\} I_1\left(\frac{2}{t}\sqrt{xz}\right) \left\{ \frac{1}{t}\sqrt{x/z} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{x}}{y^{\gamma-1}t(1-t)} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{v}} (y-v)^{\gamma-1} I_1\left(\frac{2}{t}\sqrt{zv}\right) \exp\left\{-\frac{tv}{1-t}\right\} dv \right\}$$

bzw.

$$(7.7) \quad w_t(z) = \frac{p_t}{1-p_t} \frac{\sqrt{x}}{(1-t) t^{\gamma+1} \sqrt{z} (\sqrt{y})^{\gamma-1}} \exp\left\{-\frac{yt}{1-t}\right\} I_1\left(\frac{2}{t}\sqrt{xz}\right) \times \\ \times \int_z^{\infty} (v-z)^{\gamma-1} \left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{v}{t(1-t)}\right\} I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{t}\sqrt{yv}\right) dv.$$

Beweis: (i) Es ist

$$P(0 < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq v \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n) \\ = \sum_{j=1}^{\alpha y n} \sum_{k=0}^{\alpha y n} \frac{P(Z_{nt} = j, X_0 = \alpha x n, Z_n = k, X_n = \alpha y n)}{P_n(\alpha x n, \alpha y n)} \\ = \sum_{j=1}^{\alpha y n} \frac{Q_{nt}(\alpha x n, j) Q_{n(1-t)}(j, 0) P_n(0, \alpha y n)}{P_n(\alpha x n, \alpha y n)} + \\ + \sum_{j=1}^{\alpha y n} \sum_{k=1}^{\alpha y n} \frac{Q_{nt}(\alpha x n, j) Q_{n(1-t)}(j, k) P_n(0, \alpha y n - k)}{P_n(\alpha x n, \alpha y n)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + o(1)) \left\{ \frac{\sqrt{x} (\sqrt{xy})^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma) t I_{\gamma-1}(2\sqrt{xy})} \exp\left\{-\frac{x}{t}(1-t)\right\} \times \right. \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^{\alpha \gamma n} \frac{1}{\alpha n} \sqrt{\alpha n/j} \exp\left\{-\frac{j}{\alpha n} \frac{1}{t(1-t)}\right\} I_1\left(\frac{2}{t} \sqrt{xj/\alpha n}\right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{x}}{\Gamma(\gamma) t (1-t) I_{\gamma-1}(2\sqrt{xy})} \left(\frac{x}{y}\right)^{(\gamma-1)/2} \exp\left\{-\frac{x}{t}(1-t)\right\} \times \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^{\alpha \gamma n} \frac{1}{\alpha n} \exp\left\{-\frac{j}{\alpha n} \frac{1}{t(1-t)}\right\} I_1\left(\frac{2}{t} \sqrt{xj/\alpha n}\right) \times \\
 &\quad \times \sum_{k=1}^{\alpha \gamma n} \frac{1}{\alpha n} \sqrt{\alpha n/k} \exp\left\{-\frac{k}{\alpha n} \frac{1}{1-t}\right\} \left(y - \frac{k}{\alpha n}\right)^{\gamma-1} I_1\left(\frac{2}{1-t} \sqrt{kj/\alpha n \alpha n}\right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Nach der einfachen Bestätigung von (7.5) folgt daraus durch Grenzübergang (7.6).

(ii) Die Darstellung (7.7) erhält man, indem man anstelle der Zerlegung in (i) die folgende wählt

$$\begin{aligned}
 &P\left(0 < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq v \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n\right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\alpha \gamma n} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{P(Z_{nt} = j, X_{nt} = k, X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n)}{P_n(\alpha x n, \alpha y n)} \\
 &= \sum_{j=1}^{\alpha \gamma n} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{Q_{nt}(\alpha x n, j) P_{nt}(0, k-j) P_n(1-t)(k, \alpha y n)}{P_n(\alpha x n, \alpha y n)}
 \end{aligned}$$

und zur Grenze ($n \rightarrow \infty$) übergeht.

q.e.d.

Bemerkung 7.3: Man erhält w_t durch Randomisierung von y aus $t w_{1,y}$:

Ist $f_1(v; t; x, y; 0, 1)$ die Dichte aus (6.3), so gilt nämlich

$$(7.8) \quad \int_z^\infty t w_{1,v}(z) (1-t p_{1,v}) f_1(v; t; x, y; 0, 1) dv = w_t(z) (1-p_t), \quad z > 0.$$

Dies läßt sich leicht begründen und liefert somit einen weiteren Beweis der Darstellung von w_t in (7.7):

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(z < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq z+h \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n\right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{P\left(z < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq z+h \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n\right) \mid \frac{1}{\alpha n} X_{nt}\right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_z^\infty P\left(z < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq z+h \mid X_0 = \alpha x n, X_{nt} = \alpha v n\right) \times \\
 &\quad dP\left(\frac{1}{\alpha n} X_{nt} \leq v \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n\right),
 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (7.8).

Durch eine analoge Überlegung wird auch (7.6) durchsichtiger. Für $z > 0$ ist

$$\begin{aligned} w_t(z)(1-p_t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P(z < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq z+h \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ P(z < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq z+h \mid X_0 = \alpha x n, Z_n = 0) P(Z_n = 0 \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^y P(z < \frac{Z_{nt}}{\alpha n} \leq z+h \mid X_0 = \alpha x n, Z_n = \alpha v n) dP(0 < \frac{Z_n}{\alpha n} \leq v \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n) \right\} \\ &= \frac{1}{t} \sqrt{x/z} I_1(\frac{2}{t} \sqrt{xz}) \exp\{-\frac{z}{t(1-t)} - \frac{x}{t}(1-t)\} 1p_{1,y} + \\ &\quad + \int_0^y 2f_1(z; t; x, v; 0, 1) 1w_{1,y}(v)(1 - 1p_{1,y}) dv, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (7.6); bei der Bestimmung von

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P(z < \frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \leq z+h \mid X_0 = \alpha x n, Z_n = 0)$$

mußte allerdings ähnlich wie im Beweis von Satz 7.4 vorgegangen werden.

Satz 7.5: Wenn (1.12) erfüllt ist, konvergiert $(n \rightarrow \infty)$ für alle $t > 1$

$$\frac{1}{\alpha n} Z_{nt} \mid X_0 = \alpha x n, X_n = \alpha y n$$

in Verteilung gegen eine Zufallsvariable W_t mit

$$P(W_t = 0) = 1p_{1,y} \left\{ 1 + \int_0^y 1w_{1,y}(v)(1 - 1p_{1,y}) \exp\{-\frac{v}{t-1}\} dv \right\};$$

bedingt > 0 hat W_t auf $\mathbb{R}^+$ die Dichte

$$w_t(z) = \frac{1 - 1p_{1,y}}{1 - P(W_t = 0)} \int_0^y d_{t-1,v}(z) (1 - \exp\{-\frac{v}{t-1}\}) 1w_{1,y}(v) dv,$$

wobei $d_{t-1,v}$ die Dichte (6.10) ist.

Beweis: Man verfährt wie in Bemerkung 7.3 und beachtet die Vorüberlegungen zu Satz 6.6.

q.e.d.

BEZEICHNUNGEN UND ABKÜRZUNGEN

eingeführt Seite

N_0	=	$\{0,1,2,\dots\}$	
R^+	=	$\{x \in R x > 0\}$	
$[x]$	=	größte ganze Zahl $\leq x$, $x \in R$	
$\sim$	=	asymptotisch äquivalent	
o, O	=	Landau'sche Symbole	
π	=	1, falls $m < n$	
E	=	Symbol für den Erwartungswert	
WEF	=	Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion	
GW	=	Galton-Watson	
GWI	=	Galton-Watson mit Immigration	
I_ρ	=	Besselfunktion	26
${}_nF_m$	=	verallgemeinerte hypergeometrische Funktion	70
$(Z_n)_n$	=	GW - Prozeß	
$(X_n)_n$	=	GWI - Prozeß	
Q_n	=	n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit im GW - Prozeß	
P_n	=	n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit im GWI-Prozeß	
α, γ			6
$a_{LN}(s, z)$			49
$b_{LN}(s, z)$			49
$L_{LN}(\theta, t s, x)$			49
$L(\theta, t s, x, y)$			60
$a_y^+(s, z)$			63
$b_y(s, z)$			63
${}_v c_y(s, z)$			62
${}_v f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k; x, y; t_0, t_{k+1})$			53
${}_v g_y(v, w; s, t)$			58

Abstract

MELLEIN, BERNHARD:

DER KRITISCHE GALTON-WATSON PROZEß MIT IMMIGRATION — LOKALE GRENZ-
WERTSATZE UND APPROXIMIERENDE DIFFUSIONEN

Es sei $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ ein kritischer Galton-Watson Prozeß mit Immigration, dessen Nachkommensverteilung $\{Q(1,k) | k = 0,1,\dots\}$, mit $Q(1,1) < 1$, einer $j^2 \log j$ -Bedingung (d.h. es ist $\sum_{j=1}^{\infty} Q(1,j) j^2 \log j < \infty$) und dessen Immigrationsverteilung $\{P(0,k) | k = 0,1,\dots\}$, mit $0 < P(0,0) < 1$, einer $j \log j$ -Bedingung genügt. Ist Q außerdem noch aperiodisch, so gilt für die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit P_n von $(X_n)_n$

$$(\Delta) \quad \lim_{j \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, i \geq 0} \alpha n \left(\frac{i}{j}\right)^{(\gamma-1)/2} \exp\left(\frac{i+j}{\alpha n}\right) \frac{P_n(i,j)}{I_{\gamma-1}\left(\frac{2}{\alpha n} \sqrt{ij}\right)} = 1.$$

$\frac{i}{n}, \frac{j}{n}$ bleiben beschränkt

Dabei ist $\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)Q(1,k)$, $\gamma = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} kP(0,k)$ und $I_{\gamma-1}$ die "Bessel-Funktion mit rein imaginärem Argument der Ordnung $\gamma-1$ ".

Mit Hilfe von (Δ) und einer entsprechenden asymptotischen Beziehung für die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit des kritischen Galton-Watson Prozesses wird

- a) das asymptotische Verhalten des stationären Maßes und der Green-Funktion von $(X_n)_n$ untersucht,
- b) gezeigt, daß für $x, y \geq 0$

$$\left\{ \frac{1}{\alpha n} X_{[nt]} ; 0 \leq t \leq 1 \mid X_0 = [\alpha x n + o(n)], X_n = [\alpha y n + o(n)] \right\}$$

im Sinne der endlich-dimensionalen Verteilungen gegen einen Diffusionsprozeß konvergiert

und

- c) die Frage nach der asymptotischen Verteilung der Generationen im $(X_n)_n$ -Prozeß beantwortet.

Literaturverzeichnis

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. (1965). Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York.
- ATHREYA, K.B. & NEY, P. (1972). Branching Processes. Springer-Verlag, Berlin.
- ERDELYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. & TRICOMI, F.G. (1954). Tables of Integral Transforms, Vol. II. McGraw-Hill, New York.
- ESTY, W. (1976). Diffusion limits of critical branching processes conditioned on extinction in the near future. J. Appl. Prob. 13, 247 - 254.
- EXTON, H. (1978). Handbook of Hypergeometric Integrals. Ellis Horwood Limited, Chichester.
- FELLER, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and its Applications 2 (2nd ed.). Wiley, New York.
- FOSTER, J.A. (1969). Branching processes involving immigration. Ph. D. Thesis, Univ. of Wisconsin.
- FOSTER, J.A. (1971). A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration. Ann. Math. Statist. 42, 1773 - 1776.
- FOSTER, J.A., WILLIAMSON, J.A. (1971). Limit theorems for the Galton-Watson process with state-dependent immigration. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 20, 227 - 235.
- HEATHCOTE, C.R. (1965). A branching process allowing immigration. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 27, 138 - 143.
- HEATHCOTE, C.R. (1966). Corrections and comments on the paper 'A branching process allowing immigration'. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 28, 213 - 217.
- JAGERS, P. (1975). Branching Processes with Biological Applications. Wiley, New York.
- KESTEN, H., NEY, P. & SPITZER, F. (1966). The Galton-Watson process with mean one and finite variance. Theory Prob. Appl. 11, 513 - 540.

- LAMPERTI, J. (1967). Limiting distributions for branching processes. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. II, Part II, 225 - 242.
- LAMPERTI, J. & NEY, P. (1968). Conditioned branching processes and their limiting diffusions. Theory Prob. Appl. 13, 128 - 139.
- OBERHETTINGER, F. & BADII, L. (1973). Tables of Laplace Transforms. Springer-Verlag, Berlin.
- PAKES, A.G. (1970). An asymptotic result for a subcritical branching process with immigration. Bull. Austral. Math. Soc. 2, 223 - 228.
- PAKES, A.G. (1971a). On the critical Galton-Watson process with immigration. J. Austral. Math. Soc. 12, 476 - 482.
- PAKES, A.G. (1971b). Branching processes with immigration. J. Appl. Prob. 8, 32 - 42.
- PAKES, A.G. (1972). Further results on the critical Galton-Watson process with immigration. J. Austral. Math. Soc. 13, 277 - 290.
- PAKEŞ, A.G. (1976). Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration. Stochastic Processes Appl. 4, 175 - 185.
- PRABHU, N.U. (1965). Stochastic Processes. Macmillan, New York.
- QUINE, M.P. (1970). The multitype Galton-Watson process with immigration. J. Appl. Prob. 7, 411 - 422.
- RENYI, A. (1966). Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit einem Anhang über Informationstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- SCHÖTZHOLD, F. (1975). Über die Verteilung der Generationen in Verzweigungsprozessen mit Einwanderung. Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
- SENETA, E. (1968). The stationary distribution of a branching process allowing immigration: A remark on the critical case. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 30, 176 - 179.
- SENETA, E. (1969). Functional equations and the Galton-Watson process. Adv. Appl. Prob. 1, 1 - 42.
- SENETA, E. (1970a) On the supercritical Galton-Watson process with immigration. Math. Biosci. 7, 9 - 14.

- SENETA, E. (1970b). An explicit limit theorem for the critical Galton-Watson process with immigration. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 32, 149 - 152.
- SLATER, L.J. (1966). Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge University Press.
- WATSON, G.N. (1952). A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press.

LEBENS LAUF

des	Bernhard Mellein
geboren am	
1. November 1948	in Gernersheim als Sohn des Schiffers Hartwig Mellein und seiner Ehefrau Helene, geborene Hubach
Ostern 1955 bis	
Frühjahr 1960	Besuch der Volksschule in Sondernheim
Frühjahr 1960 bis	
Mitte 1968	Besuch des Staatlich-Neusprachlichen Gymnasiums in Gernersheim
seit dem Winter- semester 1968/69	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz
Prüfungen	
29. 6.1968	Reifeprüfung
28.10.1970	Diplom-Vorprüfung in Mathematik
26. 3.1974	Diplomprüfung in Mathematik (Thema der Diplomarbeit: " Summen abhängiger Bernoulli-Variabler ")
vom 1.4.1974 bis	
31.3.1979	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz
seit 1.4.1979	Akademischer Tutor im Rahmen der ersten Durchführung eines Fernstudiums im Medien- verbund für den Studiengang Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

